An algebraists view of the multinomial coefficients

Pablo S. Ocal

Texas A&M University

February 16th, 2019

Outline

Where did they appear?

1. Pingala wrote "Chandasastra" around the 3rd and 2nd centuries BCE.
2. Halayudha wrote "Mrtasanjivani" around the 10th century.
3. Bhaskaracharya wrote "Lilavati" in 1150.
4. Pascal wrote "Traite du triangle arithmetique" in 1653.
5. Andreas von Ettingshausen introduced the modern notation in 1826.

verschiedener Elemente ohne Wiederholungen für die kte Klasse zu suchen, wobei k nie größer seyn kann, als n.

Da wir im Folgenden sehr häufig Gelegenheit haben werden, von dem numerischen Ausdrucke dieser Menge Gebrauch zu machen, so wollen wir dafür das Zeichen $\binom{n}{k}$ wählen, und es mit den Worten n über k aussprechen, wobei die obere Zahl stets die Anzahl der combinirten Elemente, die untere aber den Rang der Combinationsklasse angibt.

Man denke sich alle Combinationen der n Elemente zur nächstvorhergehenden $(k-1)$ten Klasse gebildet, und jede einzelne der hiebei Statt findenden $\binom{n}{k-1}$ Complexionen, mit jedem der in ihr nicht vorkommenden $n-(k-1)$ Elemente verbunden, so ergeben sich $\binom{n}{k-1}[n-(k-1)]$ Complexionen, welche sämmtlich der kten Klasse angehören, und unter welchen jede denkbare Combination dieser Klasse genau kmal erscheint. Jede Combination der kten Klasse kann nämlich, indem man sich stets ein anderes ihrer Elemente davon getrennt vorstellt, auf k verschiedene Arten durch Vereinigung einer $(k-1)$ stelligen Complexion mit einem einfachen Elemente erzeugt werden; welche auch immer diese $(k-1)$ stellige Complexion sey, so mußte sie sich jedesmal unter obigen Combinationen der $(k-1)$ten Klasse befinden, und indem sie mit allen in ihr nicht vorkommenden $n-(k-1)$ Elementen Verbindungen einging, auch jenes einzelne Element mit aufnehmen. Es ist demnach die Anzahl aller verschiedenen Combinationen von n Elementen zur kten Klasse

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-(k-1)}{k}.$$

Allein in der ersten Combinationsklasse steht jedes Element bloß einzeln, daher ist $\binom{n}{1} = n$, also für

$$k = 2,\ \binom{n}{2} = \binom{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$k = 3,\ \binom{n}{3} = \binom{n}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$k = 4,\ \binom{n}{4} = \binom{n}{3} \cdot \frac{n-3}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w.

und allgemein

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots k}$$

Beispiel. Für die gewöhnliche Zahlen-Lotterie zu 90 Nummern ist

die Anzahl aller möglichen Amben

$$= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005;$$

die Anzahl der Ternen

$$= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480;$$

die Anzahl der Quaternen

$$= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190;$$

endlich die Anzahl der Quinternen

$$= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268.$$

Zweiter Fall. Es ist die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur kten Klasse mit uneingeschränkten Wiederholungen zu bestimmen, wobei k so groß seyn kann, als man will.

Man bezeichne die verlangte Anzahl einstweilen durch C_k, und denke sich alle Combinationen mit Wiederholungen der gegebenen n Elemente zur nächstvorhergehenden $(k-1)$ten Klasse gebildet, so wird die Anzahl derselben, der angenommenen Bezeichnung gemäß, durch C_{k-1} vorgestellt. Man verbinde jede

Combinatorial definitions

Definition

The *binomial coefficient n over k*, denoted $\binom{n}{k}$, is the number of subsets of k distinct elements that can be obtained from a set of n elements.

Definition

The *binomial coefficient $n+1$ over k*, denoted $\binom{n+1}{k}$, is the number of strings consisting of k ones and n zeros such that no two ones are adjacent.

Clearly we have $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Factorial definition

Definition

The *binomial coefficient n over k*, for $k \leq n$, is:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Definition

The *multinomial coefficient*, for $n = k_1 + \cdots + k_m$, is:

$$\binom{n}{k_1, \cdots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}.$$

The Binomial and Multinomial Theorem

A classic result immediately proves $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Theorem (Binomial Theorem)

Given $n \in \mathbb{N}$ we have:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-1} y^k.$$

And a generalization immediately proves $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m} \in \mathbb{N}$.

Theorem (Multinomial Theorem)

Given $n, m \in \mathbb{N}$ we have:

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}.$$

Direct proofs (I)

A combinatorial approach:

Proposition

Given $n \in \mathbb{N}$ we have:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Proof.

We have $(1+x)$ multiplied n times. For any $k \leq n$, to obtain x^k we pick k factors with x (out of the n possible), and for the remaining $n-k$ we pick 1. $\square$

Hence $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Direct proofs (II)

An iterative approach:

Proposition (Pascal's rule)

Given $n \in \mathbb{N}$ we have that for $0 < k < n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Proof.

Left as exercise. $\square$

And since $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, we have $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Pascal's rule proof

Proof.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1-k+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Direct proofs (and III)

Theorem

Given $n, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ with $n = k_1 + \cdots + k_m$ we have that $\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \in \mathbb{N}$.

Proof.

$\square$

Direct proofs (and III)

Theorem

Given $n, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ with $n = k_1 + \cdots + k_m$ we have that $\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \in \mathbb{N}$.

Proof.

We have a natural inclusion $S_{k_1} \times \cdots \times S_{k_m} \subset S_n$. Then by Lagrange's Theorem $k_1! \cdots k_m! = |S_{k_1} \times \cdots \times S_{k_m}|$ divides $|S_n| = n!$. $\square$

Tiny prerequisites

For two sets X and Y, we have $|X \times Y| = |X||Y|$. Moreover, $|S_n| = n!$. The natural inclusion:

$$\begin{array}{ccc} S_{k_1} \times \cdots \times S_{k_m} & \longrightarrow & S_n \\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) & \longmapsto & \sigma_1 \ldots \sigma_m \end{array}$$

where σ_i acts on the components ranging from $k_1 + \cdots + k_{i-1} + 1$ to $k_1 + \cdots + k_i$, $i = 1, \ldots, m$, is a group homomorphism.

Theorem (Lagrange's Theorem)

Given a finite group G and any subgroup H, then $|H|$ divides $|G|$.

Conclusion

Non trivial results can be used to prove concepts in a beautiful way.

Thank you!