Introduction à la Géométrie Algébrique
Un cours de Ilia Itenberg

Pablo Sánchez
Avec l'aide de Paula Verdugo

3 novembre 2015

Table des matières

Chapitre 1

Courbes affines planes

1.1 Introduction

Définition 1.1.1. *Une* courbe affine plane C *(définie sur un corps* $\mathbb{K}$ *algébriquement clos) est l'ensemble des points* $(x, y) \in \mathbb{K}^2 = \mathbb{A}^2$ *tels que* $f(x, y) = 0$ *où* f *est un polynôme non constant à deux variables à coéfficients dans* $\mathbb{K}$.

Le degré *de la courbe affine plane* C *est le dregré du polynôme* f.

La courbe affine plane C *est dite* irréductible *si le polynôme* f *est irréductible (ici on utilise que per* $f \in \mathbb{K}[x, y]$ *non constant on a une décomposition* $f = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ *en facteurs irréductibles, et alors une courbe est formé par les differentes courbes définies par ces facteurs :* $C = C_1 \cup \cdots C_r$*).*

Exemple 1.1.2. *Considérons* $x^2 + y^2 = 0$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *(c'est à dire,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*) :*

- $(0, 0)$

Cette courbe à degré deux. Mais $x^4 + y^4 = 0$ *définit aussi ce point, et alors il aurait degré quatre. On n'a pas d'unicité de degré, car en plus* $x^6 + y^6 = 0$ *définit aussi ce point avec degré six.*

On a alors aussi un problème avec l'irreductibilité : $f(x, y) = x^2 + y^2$ *est irréductible, mais* $g(x, y) = x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$ *n'est pas irréductible.*

Pour résoudre ces problèmes, on traitera le cas de $\mathbb{K}$ *algébriquement clos (sauf autrement dit).*

Lemme 1.1.3. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps arbitraire,* $f \in \mathbb{K}[x, y]$ *irréductible,* $g \in \mathbb{K}[x, y]$. *Si* g *n'est pas divisible par* f, *alors le système :*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

n'a qu'un nombre finit de solutions.

Démonstration. On peut considérer f et g comme des polynômes dans $\mathbb{K}(y)[x]$. On remarque que f reste irréductible comme polynôme dans $\mathbb{K}(y)[x]$ et g est toujours pas divisible par f : il suffit d'écrire les conditions, multiplier par le diviseur commun et on obtien une contradiction.

Doncs, par l'indentité de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{K}(y)[x]$ tels que $uf + vg = 1$, d'où :

$$u'(x, y)f(x, y) + v'(x, y)g(x, y) = b(y), \tag{1.2}$$

où $u', v' \in \mathbb{K}[x, y]$, $b \in \mathbb{K}[y]$. Soit (x_0, y_0) une solution de notre système, en particulier $f(x_0, y_0) = 0 = g(x_0, y_0)$ et alors $b(y_0) = 0$. Alors il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour y_0. Comme

f est irréductible, $f(x, y_0)$ n'est pas nul, et alors il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour x_0. □

Proposition 1.1.4. *Tout corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ est infini.*

Démonstration. Supposons que $\mathbb{K}$ est fini, soit $\mathbb{K} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Considérons le polynôme $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) + 1$. Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, il décompose en n racines, mais $f(\alpha_i) = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$, contradiction. Doncs, $\mathbb{K}$ est infini. □

Sauf autrement dit, d'ici en avant on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos.

Corollaire 1.1.5. *Tout polynôme irréductible $f \in \mathbb{K}[x, y]$ est déterminé par sa courbe dans $\mathbb{A}^2$ de façon unique (à multiplication par une constante près).*

Démonstration. On commence par remarquer que toute courbe dans $\mathbb{A}^2$ définie sur un corps algébriquement clos à un nombre infini de points : pour chaque $y_0 \in \mathbb{K}$ on obtient que $f(x, y_0) = 0$ est un polynôme non nul à une variable avec un nombre fini de solutions, en particulier il existe un x_0 avec $f(x_0, y_0) = 0$.

Soit $f \in \mathbb{K}[x, y]$ irréductible, C la courbe définie par $f(x, y) = 0$. Si un polynôme $g \in \mathbb{K}[x, y]$ définie la même courbe, alors :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

à un nombre infini de solutions. Doncs par le Lemme 1.1.3 on a que g est divisible par f. □

On a en fait un enoncé similaire pour les polynômes sans facteurs irréductibles multiples : soit C_1, C_2 deux courbes dans $\mathbb{A}^2$ de degré d_1, d_2 respectivement. On peut considérer $\#(C_1 \cap C_2)$. Si $\#(C_1 \cap C_2)$ est fini, alors on aura $\#(C_1 \cap C_2) \leq d_1 d_2$ avec l'égalité sous certaines conditions.

Ceci est connu comme le **Théorème de Bézout**, et n'est valide que pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Si $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos, ceci n'est pas vrai : prenant deux coniques (le degré est doncs 2 pour chaqu'une), par le Théorème de Bézout on aurait d'avoir toujours 4 points d'intersection, mais on peut trouver :

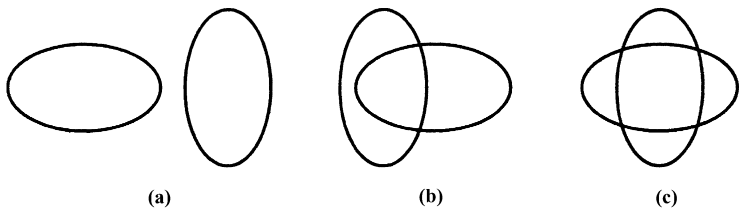


FIGURE 1.1 – Quelques intersection de coniques. Image de [1].

Exemple 1.1.6. *Les outils des courbes affines planes peut être utilisé dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et la courbe définie par $x^n + y^1 = 1$ avec $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on peut passer à la clausure algébrique de $\mathbb{Q}$, travailler et redescendre pour résoudre quelques problèmes.*

1.2 Courbes Rationnelles

Exemple 1.2.1. *Considérons les points satisfaient $y^2 = x^2 + x^3$, c'est à dire, la courbe définie par $f(x,y) = y^2 - x^2 - x^3$. On veut décrire l'ensemble de ces points comme $(\varphi(t), \psi(t))$ étant $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ deux fonctions rationnelles. En posant $y = tx$ avec $t \in \mathbb{R}$ un paramètre, on a $t^2x^2 = x^2 + x^3$, avec $x = 0$ une solution. Si on impose $x \neq 0$, alors on trouve $t^2 - 1 = x$. Posons doncs $y = t(t^2 - 1)$, et alors :*

$$\varphi(t) = t^2 - 1, \quad \psi(t) = t(t^2 - 1). \tag{1.4}$$

Ce qu'on à fait est une projéction de la courbe dans la droite $x = 1$:

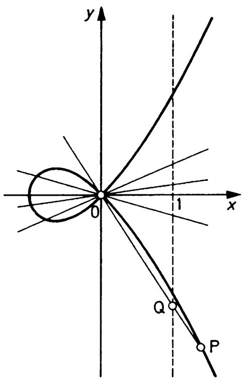


FIGURE 1.2 – Projection d'une cubique. Image de [1].

Altrement dit, on a paramétriser la courbe par le pendent t de la deuxième coordonnée (y) associée à chaque point.

Définition 1.2.2. *Soit C une courbe irréductible dans $\mathbb{A}^2$ définie par un polynôme irréductible $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$. On dit que C est* rationnelle *s'il existe deux fonctions rationnelles $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ (dont au moins une fonction n'est pas constante) telles que $f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{K}$ où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont définies. En ce cas, on dit que (φ, ψ) est une* paramétrisation *de C.*

Exemple 1.2.3.

1. *Toute droite dans $\mathbb{A}^2$ est rationnelle.*
2. *Toute conique irréductible dans $\mathbb{A}^2$ est rationnelle.*

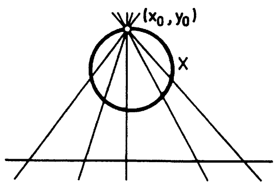


FIGURE 1.3 – Projection d'une conique. Image de [1].

Pour voir ceci, on prends un point (x_0, y_0) sur la conique définie par $f(x,y) = 0$. Pour chaque droite qui passe par (x_0, y_0) la pente paramètrise la courbe : ces droites ont la forme $y - y_0 = t(x - x_0)$. On remplace y dans $f(x,y) = 0$ par $y_0 + t(x - x_0)$ et on obtient une équation de degré 2 d'ont connait une solution :

$$A(t)x^2 + B(t)x + C(t) = 0, \ \textit{c'est à dire, } x^2 + B'(t)x + C'(t) = 0, \tag{1.5}$$

où $B'(t)$ est moins la somme des racines, d'on :

$$\begin{cases} x = \varphi(t). \\ y = y_0 + t(x - x_0) = \psi(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

En ce cas, si on connait une solution rationnelle (x_0, y_0) et $f(x, y)$, ce méthode nous donne toutes les solutions.

Mais toutes les courbes ne sont pas rationnelles. On peut nous démander comment savoir si une courbe est rationnelle. Pour ceci on traitera avec une réformulation de ce problème.

Définition 1.2.4. *Considérons C une courbe irréductible dans $\mathbb{A}^2$ définie par $f(x, y) = 0$ sent $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ irréductible. On fabrique $K(C)$ le* corps des fonctions ratinonelles sur *C. Pour ceci on considère les classes d'équivalence de fonctions rationnelles $u(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$ avec $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$, tal que $q(x, y)$ ne soit pas divisible par $f(x, y)$ avec la rélation d'équivalence :*

$$\frac{p_1(x,y)}{q_1(x,y)} = u_1(x, y) \sim u_2(x, y) = \frac{p_2(x,y)}{q_2(x,y)} \iff f(x, y)|p_1(x, y)q_2(x, y) - p_2(x, y)q_1(x, y), \tag{1.7}$$

c'est à dire, $p_1(x, y)q_2(x, y) - p_2(x, y)q_1(x, y)$ est divisible par $f(x, y)$.

Proposition 1.2.5. *Soit C une courbe irréductible dans $\mathbb{A}^2$ définie par $f(x, y) = 0$. Alors $K(C)$ est vraiment un corps, en particulier $\sim$ est vraiment une rélation d'équivalence.*

Démonstration. Par symmetrie dans la rélation $\sim$, elle est réciproque et réflexive. Pour voir qu'elle est transitive, on notte que :

$$\begin{matrix} \dfrac{p_1}{q_1} \sim \dfrac{p_2}{q_2} \Longrightarrow p_1q_2 - p_2q_1 = af \\ \dfrac{p_2}{q_2} \sim \dfrac{p_3}{q_3} \Longrightarrow p_2q_3 - p_3q_2 = bf \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} p_1q_3q_2 - p_2q_1q_3 = aq_3f \\ p_2q_3q_1 - p_3q_1q_2 = bq_1f \end{matrix} \tag{1.8}$$

pour $a, b \in \mathbb{K}[x, y]$, et si on somme on obtient :

$$p_1q_3 - p_3q_1 = \frac{aq_3 + bq_1}{q_2} f \Longrightarrow \frac{p_1}{q_1} \sim \frac{p_3}{q_3}. \tag{1.9}$$

Soit $p/q \in K(C)$ non nul, c'est à dire, tal que $p \neq 0$ comme élément de $K(C)$. On notte que ceci est équivalent à que p ne soit pas divisible par f :

$$\frac{p}{q} \sim \frac{0}{1} \iff p = af \tag{1.10}$$

pour certain $a \in \mathbb{K}[x, y]$. Alors on peut considérer $q/p \in K(C)$ qui est effectivement son invers. $\square$

Remarque 1.2.6. *Si on a un point $p \in C \subset \mathbb{A}^2$ sur une courbe irréductible où u_1 et u_2 sont deux fonctions rationnelles définies en p et $u_1 \sim u_2$, alors $u_1(p) = u_2(p)$. En particulier, c'est possible d'avoir des fonctions équivalentes avec un domain de définition diférent.*

Démonstration. Si on a :

$$\frac{g_1}{h_1} = u_1 \sim u_2 = \frac{g_2}{h_2} \Longrightarrow g_1h_2 - g_2h_1 = af \tag{1.11}$$

pour certain $a \in \mathbb{K}[x, y]$, et donc avaluant en $p \in C$ on obtient :

$$g_1(p)h_2(p) - g_2(p)h_1(p) = 0 \Longrightarrow u_1(p) = \frac{g_1(p)}{h_1(p)} = \frac{g_2(p)}{h_2(p)} = u_2(p). \tag{1.12}$$

□

Ceci fait que on puisse parler du "valeur" de la classe d'equivalence dans un point.

Exemple 1.2.7. *Considérons l'equation $x^2 + y^2 = 1$, et prenons $(1 - y)/x$, $x/(1 + y)$, qui sont équivalentes. Considérons le point $p = (0, 1)$. Une est définie mais l'autre non.*

Mais on peut avoir des points mauvais ou on n'a pas des représentants définis sur ces points.

Définition 1.2.8. *Soit C une courbe irréductible. On dit qu'un point $p \in C$ est* régulier *pour un élément $\xi \in K(C)$ si dans la classe d'équivalence ξ on peut trouver un représentant u qui est définie en p.*

Proposition 1.2.9. *Considérons la courbe C définie par $y = 0$ (que on notte par $\mathbb{A}^1$). Son corps de fractions $K(C)$ peut être identifié avec $\mathbb{K}(x)$.*

Démonstration. On asssocie :

$$\begin{array}{ccc} K(C) & \longrightarrow & \mathbb{K}(t) \\ x & \longmapsto & t \\ p(x)/q(x) & \longmapsto & p(t)/q(t) \end{array} \tag{1.13}$$

qui est bien défini car :

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \sim \frac{p_2(x)}{q_2(x)} \Rightarrow p_1(x)q_2(x) - q_1(x)p_2(x) = a(x, y)y \Rightarrow a(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{p_2(x)}{q_2(x)}, \tag{1.14}$$

et établie une bijection. □

En particulier, $\mathbb{K}(x)$ contient la classe d'équivalence de $1/x$, qui n'est pas définie en $x = 0$:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \sim \frac{1}{x} \iff p(x)x - q(x) = a(x, y)y \Longrightarrow q(0) = 0. \tag{1.15}$$

L'important de la Proposition 1.2.9 est que $y = 0$ est une courbe rationnelle (comme les droites et les coniques).

Proposition 1.2.10. *Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible définie par $f(x, y) = 0$. Alors C est rationnelle ssi $K(C)$ est isomorphe à $\mathbb{K}(t)$ (en laissant $\mathbb{K}$ invariant), le corps de fonctions rationnelles à une variable.*

Démonstration. $\Rightarrow$) On considère une paramétrisation $(\varphi(t), \psi(t))$ de C. On va construire un plongement $K(C) \hookrightarrow \mathbb{K}(t)$. Pour ceci, on associe a chaque fonction rationnelle ce qu'on obtient en substituer la paramétrisation :

$$u(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)} \rightsquigarrow u(\varphi(t), \psi(t)) = \frac{p(\varphi(t), \psi(t))}{q(\varphi(t), \psi(t))}. \tag{1.16}$$

Pour le pouvoir faire, on doit être sur que $q(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$. Mais comme nous savons qu'il y a un nombre infini de points de la forme $(\varphi(t), \psi(t)) \in C$, par le Lemme 1.1.3 on a que $q(\varphi(t), \psi(t)) \neq$

0 : on sait que $q(x,y)$ n'est pas divisible par $f(x,y)$ et alors le système $q(x,y) = 0 = f(x,y)$ n'a qu'un nombre fini de solutions, entrant en contradiction si $q(\varphi(t),\psi(t)) = 0$ puis qu'on aurait l'égalité dans un nombre infini de points.

On doit vérifier que si $u_1 \sim u_2$, alors on associe le même élément de $\mathbb{K}(t)$. Mais ceci est clair, puis que si :

$$\frac{p_1(x,y)}{q_1(x,y)} = u_1(x,y) \sim u_2(x,y) = \frac{p_2(x,y)}{q_2(x,y)} \rightsquigarrow \frac{p_1(\varphi(t),\psi(t))}{q_1(\varphi(t),\psi(t))} \overset{\checkmark}{=} \frac{p_2(\varphi(t),\psi(t))}{q_2(\varphi(t),\psi(t))} \tag{1.17}$$

car $u_1 \sim u_2$ ssi $p_1(x,y)q_2(x,y)-p_2(x,y)q_1(x,y) = a(x,y)f(x,y)$ pour un certain $a(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$, et alors $p_1(\varphi(t),\psi(t))q_2(\varphi(t),\psi(t)) - p_2(\varphi(t),\psi(t))q_1(\varphi(t),\psi(t)) = a(\varphi(t),\psi(t))f(\varphi(t),\psi(t)) = 0$, precisement la condition d'égalité dans $\mathbb{K}(t)$ qu'on voulait.

On a alors un plongement de corps qui laisse $\mathbb{K}$ invariant. Il reste à utiliser le Théorème de Lüroth : tout sous-corps $L \subset \mathbb{K}(t)$ tel que $\mathbb{K} \subsetneq L$ est en fait $L \cong \mathbb{K}(t)$.

$\Leftarrow$) Supposons $K(C) \cong \mathbb{K}(t)$. Considérons les classes d'équivalence de x et y. Par l'isomorphisme, on obtient $x \cong \varphi(t)$ et $y \cong \psi(t)$ aux moins une non constantes (puis que l'isomorphisme laisse $\mathbb{K}$ invariant). De plus, on a que $f(\varphi(t),\psi(t)) = 0$ pour tout t où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont définies. En effet, dans $K(C)$ on a $f(x,y) = 0$ et pour l'isomorphisme, dans $\mathbb{K}(t)$ on a $f(\varphi(t),\psi(t)) = 0$. Donc, $(\varphi(t),\psi(t))$ est une paramétrisation de C. □

Exemple 1.2.11. *COURBE IRRÉDUCTIBLE AVEC K(C) NO ISOMORPHE À K(t).*

Cette démonstration donne une paramétrisation particulière de C qui vérifie deux propiétés importantes.

Proposition 1.2.12. *Soit C une courbe irréductible rationnelle définie par $f(x,y) = 0$ et $(\varphi(t),\psi(t))$ la paramétrisation donnée par l'isomorphisme $K(C) \cong \mathbb{K}(t)$.*

1. *A l'exception d'un nombre fini de points, tout point de C peut être représenté comme $(\varphi(t),\psi(t))$ pour un certain valeur de t.*
2. *A l'exception d'un nombre fini de points, une telle représentation est unique.*

Démonstration. Considérons l'identification $(x,y) \rightsquigarrow (\varphi(t),\psi(t))$ et soit $\chi(x,y) \cong t$. Pour $(x_0,y_0) \in C$ on a les égalités :

$$(x_0,y_0) = (\varphi(\chi(x_0,y_0)),\psi(\chi(x_0,y_0))), \quad t = \chi(\varphi(t),\psi(t)). \tag{1.18}$$

1. Prenons un point $(x_0,y_0) \in C$ pour lequel t est bien défini (c'est à dire, la deuxième équation est bien définie). Pour que ceci soit vrai, il faut que le dénominateur de $\chi(x,y) = p(x,y)/q(x,y)$ (avec $q(x,y)$ pas divisible par $f(x,y)$) ne s'annulle pas. Mais pour le Lemme 1.1.3, on a seulement un nombre fini de points qui annullent $q(x,y)$. Maintenant il peut arriver que la première equation ne soit pas bien définie, c'est à dire, que φ où ψ ne soient pas définies sur $\chi(x_0,y_0)$. Mais à nouveau, ceci dépend de que le dénominateur de φ où ψ s'annulle :
$$(\varphi(\chi(x_0,y_0)),\psi(\chi(x_0,y_0))) = \left(\frac{p_\varphi(\chi(x_0,y_0))}{q_\varphi(\chi(x_0,y_0))}, \frac{p_\psi(\chi(x_0,y_0))}{q_\psi(\chi(x_0,y_0))}\right) \tag{1.19}$$
ce qui par le Lemme 1.1.3 ce passe seulement dans un nombre fini de points.
2. La deuxième égalité nous donne le valeur de t en fonction de la représentation, ce qui nous donne l'unicité où χ est définie, c'est à dire, par tout sauf un nombre fini de points :
$$\chi(\varphi_1(t),\psi_1(t)) = t = \chi(\varphi_2(t),\psi_2(t)) \Longrightarrow (\varphi_1(t),\psi_1(t)) = (x_0,y_0) = (\varphi_2(t),\psi_2(t)). \tag{1.20}$$

$\square$

Exemple 1.2.13. *Considérons la courbe définie par* $y^2 = x^2 + x^3$*, comme à la Figure 1.2. On a déjà calculé une bonne paramétrisation :*

$$x = t^2 - 1 = \varphi(t), \quad y = t(t^2 - 1) = \psi(t), \tag{1.21}$$

mais elle peut être changé dans une mauvaise :

$$x = t^4 - 1, \quad y = t^2(t^4 - 1), \tag{1.22}$$

et maintenant on n'a pas d'unicité, car $t = 1$ *et* $t = -1$ *déterminent le même point, et ceci est vrai en général pour* $\pm t$*.*

1.3 Applications Rationnelles

Définition 1.3.1. *Soit* C *et* D *deux courbes irréductibles dans* $\mathbb{A}^2$*. Soit* u *et* v *deux fonctions rationnelles sur* C *(c'est à dire, elements de* $K(C)$*). Si* $(u(p), v(p)) \in D$ *pour tout point* $p \in C$ *où* u *et* v *sont les deux définies (c'est à dire,* u *et* v *sont régulières en* p*), on dit que* $\Phi = (u, v)$ *est une* application rationnelle *de* C *dans* D*, et on le denotera par* $\Phi : C \dashrightarrow D$*.*

Exemple 1.3.2.

1. *La projection d'une conique irréductible sur une droite (à partir d'un point appartenant à la conique, comme à la Figure 1.3) est une application rationnelle.*
   Par exemple, pour $(x-1)^2 + y^2 = 1$ *avec la paramétrisation habituelle* $y = tx$*, on a une projection sur la droite* $x = 1$*. Alors, en posant* $\Phi = (1, y/x)$ *on a une application rationnelle. Ceci fonctionne toujours.*
2. *Toute paramétrisation d'une courbe rationnelle est une application rationnelle :*

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & D \\ & (\varphi(x), \psi(x)) & \end{array} \tag{1.23}$$

   où C *est la droite définie par* $y = 0$ *et* D *est la courbe rationnelle avec paramétrisation* $(\varphi(t), \psi(t))$*.*

On veut maintenant donner une notion d'**isomorphisme** entre courbes affines planes.

Définition 1.3.3. *Soit* C *et* D *deux corbes irréductibles dans* $\mathbb{A}^2$*. On dit qu'une application rationnelle* $\Phi : C \dashrightarrow D$ *est un* isomorphisme birationnel *s'il existe une application rationnelle* $\Psi : D \dashrightarrow C$ *tel que* $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_C$ *et* $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_D$ *par tout où* $\Phi \circ \Psi$ *et* $\Psi \circ \Phi$ *sont définies respectivement.*

Remarque 1.3.4. *Considérons* Φ *un isomorphisme birationnel entre les courbes irréductibles* C *et* D*.*

1. *On a que* Φ *n'est pas constante.*
2. *Soit* $\Upsilon : D \dashrightarrow C$ *une application rationnelle. Si* Υ *est constante, alors elle est définie sur* D *tout entier.*
3. *Pour tout point* $q \in D$*, le nombre d'images réciproques* $\Phi^{-1}(q)$ *est fini.*

Démonstration. 1. Une contradicction est obtenue en composant avec l'application rationnelle Ψ satisfaient la Définition 1.3.3 :

$$\begin{tikzcd} & & \bullet\, q \arrow[dl, bend right, "\Psi"'] & \\ C & r\,\bullet \arrow[dr, bend right, "\Phi"'] & & D \\ & & \bullet\, p & \end{tikzcd}$$

ce n'est pas l'identité quand $\Phi(r) = q \neq p$ pour tout $r \in C$.

2. Posons $\Upsilon = (\xi, \eta)$ avec ξ et ν deux fonctions rationnelles sur D. Soit $(x_0, y_0) \in C$ l'image de Υ. Alors x_0 (comme fonction constante) est dans la classe ξ et y_0 (comme fonction constante) est dans la classe η, et tout les deux sont définies par tout D.
3. Posons $\Phi = (u, v)$ avec $u, v \in K(C)$. Soit $p_i \in C$, $i \in \Lambda$ un ensemble de points tels que $\Phi(p_i) = (u(p_i), v(p_i)) = q$. Comme u et v sont des classes d'equivalences de polynômes, elles ne peuvent pas avoir un nombre infinit de solutions, sauf si ils ont un polynôme constante dans la classe d'équivalence (et alors u et v sont les deux constantes). Mais ceci est une contradiction avec que Φ est un isomorphisme birationnel, et alors Λ est fini.

$\square$

Corollaire 1.3.5. *Soit $\Phi : C \dashrightarrow D$ un isomorphisme birationnel, posons $U \subset C$ le domaine de définition, avec inverse Ψ, posons $V \subset D$ le domaine de définition. Alors Φ établit une bijection entre $U \cap \Phi^{-1}(V)$ et $V \cap \Psi^{-1}(U)$. De plus, $C \setminus U \cap \Phi^{-1}(V)$ et $D \setminus V \cap \Psi^{-1}(U)$ (les complementaries respectives de ces ensembles) sont finis.*

Démonstration. On a que les points où on peut avoir une bijection sont :

$$\begin{aligned} \Phi : U \longrightarrow D \supset V, &\quad U \cap \Phi^{-1}(V) \\ \Psi : V \longrightarrow C \supset U, &\quad V \cap \Psi^{-1}(U) \end{aligned} \tag{1.24}$$

car on a besoin de que Φ soit définie et l'image soit à V, et similairement Ψ soit définie et l'image soit à U. Mais pour $x \in U \cap \Phi^{-1}(V)$ on a $\Phi(x) \in V \cap \Psi^{-1}(U)$:

$$\begin{aligned} & x \in \Phi^{-1}(V) \Longrightarrow \Phi(x) \in V, \\ & \Phi(x) \in \Psi^{-1}(U) \iff x = \Psi \circ \Phi(x) \in U, \end{aligned} \tag{1.25}$$

où la deuxième égalité est vrai car Φ et Ψ sont l'inverse une de l'autre. Par simetrie, pour $y \in V \cap \Psi^{-1}(U)$ on a $\Psi(y) \in U \cap \Phi^{-1}(V)$. Mais alors non seulement $x = \Psi \circ \Phi(x)$ et $\Phi(x) = \Phi \circ \Psi(\Phi(x))$, sinon que si $y \in V$ tal que $\Psi(y) = x$, alors $y = \Phi \circ \Psi(y) = \Phi(x)$. Ceci montre l'injectivité et la surjectivité, donc on a une bijection entre les deux ensembles.

Voyons que $C \setminus (U \cap \Phi^{-1}(V))$ est fini, le cas que $D \setminus (V \cap \Psi^{-1}(U))$ est fini suit de manière similaire. Posons :

$$\begin{array}{cccccc} \Phi & : & C & \longrightarrow & D \\ & & U & \longmapsto & \Phi(U) \\ & & \Phi^{-1}(V) & \longleftarrow & V \end{array} \tag{1.26}$$

où $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ avec $\phi_1, \phi_2 \in K(C)$, C définie par $f(x, y) = 0$ pour certain $f \in \mathbb{K}[x, y]$. On a que $C \setminus (U \cap \Phi^{-1}(V)) = (C \setminus U) \cup (C \setminus \Phi^{-1}(U))$. Mais $C \setminus U = C \cup U^C$ sont les solutions de $f(x, y) = 0$ et les points où les denominateurs de ϕ_1 et ϕ_2 ne s'annullent pas, qui par le Lemme 1.1.3 est un nombre fini. De plus $C \setminus \Phi^{-1}(U)$ sont les solutions de $f(x,y)=0$ et les points $p \in C$ tals que $\Phi(p) = (\phi_1(p), \phi_2(p)) \notin V$, un sous ensemble de $D \setminus V$ et alors $C \setminus \Phi^{-1}(V) \subset \Phi^{-1}(D \setminus V)$, qui est un ensemble fini par la Remarque 1.3.4. Donc $C \setminus (U \cap \Phi^{-1}(V))$ est fini. □

C'est à dire, sauf dans un nombre finit de points de C et D, on a que Φ et Ψ forment une bijection habituelle.

Définition 1.3.6. *S'il existe un isomorphisme birationnel entre deux courbes irréductibles C et D, on dit que C et D sont* birationnellement équivalentes.

Exemple 1.3.7. *Soit C une courbe irréductible dans $\mathbb{A}^2$, alors C est rationnelle ssi C est birationnellement équivalente à une droite, plus spécifiquement la droite définie par $y=0$.*

Démonstration. On suppose que C est définie par $f(x,y)=0$ pour $f \in \mathbb{K}[x,y]$ irréductible et D par $y=0$.

$\Rightarrow$) Si C est rationnelle, prenons $(\varphi(t), \psi(t))$ la paramétrisation qui provient de considérer $K(C) \cong \mathbb{K}(t)$. En particulier, posons $t = \chi(x,y)$. Alors :

$$\begin{array}{cccc} \chi & : & C & \longrightarrow & D \\ & & (\varphi(t), \psi(t)) & \longleftrightarrow & t \end{array} \tag{1.27}$$

est un isomorphisme birationnel.

$\Leftarrow$) Soit $\Phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ un isomorphisme birationnel entre C et D. Alors on a :

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & : & C & \longrightarrow & D \\ & & (x,y) & \longleftrightarrow & t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} \Psi & : & D & \longrightarrow & C \\ & & t & \longleftrightarrow & (x,y) \end{array} \tag{1.28}$$

où Ψ est l'application rationnelle inverse. On peut choisir des représentants $x(t)$, $y(t)$ de manière que $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ soit la notre paramétrisation de C. □

Proposition 1.3.8. *Soit C une courbe irréductible rationnelle et $(\varphi(t), \psi(t))$ une paramétrisation de C satisfaient la Proposition 1.2.12. Alors cette paramétrisation donne un plongement $K(C) \hookrightarrow \mathbb{K}(t)$ qui est un isomorphisme.*

Démonstration. La où $(x,y) = (\varphi(t), \psi(t))$ est bien défini (c'est à dire, tout C sauf un nombre fini de points), on peut associer :

$$\begin{array}{ccc} K(C) & \hookrightarrow & \mathbb{K}(t) \\ \left[\frac{p(x,y)}{q(x,y)}\right] & \longmapsto & \frac{p(\varphi(t),\psi(t))}{q(\varphi(t),\psi(t))} \end{array} \tag{1.29}$$

et on veut voir que ceci est un isomorphisme. On peut considérer :

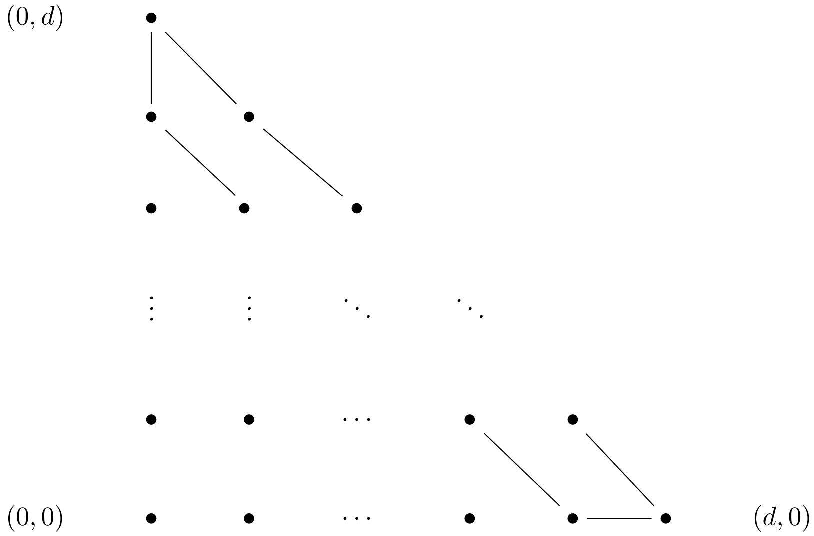
$$\begin{array}{ccccc} K(C) & \xrightarrow{\chi} & K(\varphi(t), \psi(t)) & \hookrightarrow & \mathbb{K}(t) \\ x & \longmapsto & \varphi(t) & & \\ y & \longmapsto & \psi(t) & & \end{array} \tag{1.30}$$

où χ est bien définie, injective, surjective et un morphisme par construction. Alors par le Théorème de Luroth, on a que $K(C) \cong \mathbb{K}(t)$. □

On parlera maintenant du **polygone de Newton**.

Définition 1.3.9. *On défini le* polygone de Newton *d'un polynôme $f \in \mathbb{K}[x,y]$ comme l'enveloppe convexe de tous les points $(i,j) \in \mathbb{R}^2$ tal que f contient un monôme $a_{ij}x^iy^j$ avec $a_{ij} \neq 0$.*

Exemple 1.3.10. *Soit $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ un polynôme qui contient que des termes de degré $d-1$ et d. Alors son polygone de Newton est contenu dans le polygone :*



Proposition 1.3.11. *Soit C une courbe irréductible de degré d dans $\mathbb{A}^2$ définie par $f(x, y) = 0$. Supposons que f contient que des termes de degré $d-1$ et d. Alors C est rationnelle.*

Démonstration. On veut trouver une paramétrisation $(\varphi(t), \psi(t))$ de C. Posons $y = tx$, on a que :

$$f(x, y) = f(x, tx) = x^{d-1}(A(t)x + B(t)) \tag{1.31}$$

Alors C est birationnellement équivalente à D définie par $g(x, t) = A(t)x + B(t)$. Comme les zéros de celle ci sont pour $x = -A(t)/B(t)$, on a que :

$$\begin{cases} x = -\frac{A(t)}{B(t)} = \varphi(t) \\ y = tx = -t\frac{A(t)}{B(t)} = \psi(t) \end{cases} \tag{1.32}$$

est une paramétrisation. □

On remarque que le cas précédent à la Proposition 1.3.11 c'est celui d'une courbe C définie par une forme linéaire de degré d (c'est à dire, C es définie par un polynôme f contenant que des termes de degré d), mais si $d > 1$ ces formes ne sont pas irréductibles et alors ce n'est pas un cas intéressant.

Voyons que effectivement si on a un polynôme à deux variables x_0, x_1 de degré d, une de ces variables doit être non nulle (soit par exemple $x_1 \neq 0$) donc on peut diviser par elle :

$$a_0x_0^d + a_1x_0^{d-1}x_1 + \cdots + a_{d-1}x_0x_1^{d-1} + a_dx_1^d = 0 \iff a_0y^d + \cdots + a_d = 0, \tag{1.33}$$

où $y = x_0/x_1$. Mais ce deuxième polynôme est reducible car $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, et alors il factorise avec $c_1, \ldots, c_d$ comme racines. De cette manière :

$$0 = \prod_{i=0}^{d}(y - c_i) \iff 0 = \prod_{i=0}^{d}(x_0 - c_ix_1) \tag{1.34}$$

On peut aussi considérer le cas d'un polynôme irréductible $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ tal que chaque monôme est de degré d où $d-1$ où $d-2$. Si on fait le changement de variables $y = tx$, on obtien :

$$f(x, tx) = x^{d-2}(A(t)x^2 + B(t)x + C(t)), \tag{1.35}$$

avec $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{K}[t]$, des polynômes à une variable. Considérons la courbe définie par $g(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$, à les coordonnées (x, t). Cette courbe est birationnellement équivalente à la courbe originelle :

$$f(x, y) \underset{(x,tx)}{\overset{(x,y/x)}{\rightleftarrows}} g(x, t) \tag{1.36}$$

mais (si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, car on voudra diviser par 2 en resoudre $g(x, t) = 0$ pour x) on peut réécrire cette équation comme $s^2 = p(t)$, où :

$$s = 2A(t)x + B(t), \quad p(t) = B^2(t) - 4A(t)C(t). \tag{1.37}$$

Une courbe donné par cette équation est die une courbe **hyperelliptique**.

Remarque 1.3.12. *Supposons que $p(t)$ est de degré pair (par exemple $2n$), alors on peut réécrire $s^2 = h(t)$ avec $h(t)$ de degré $2n - 1$ (on peut diminuer le degré en 1).*

Démonstration. Posons $p(t) = q(t)(t - \alpha)$, alors :

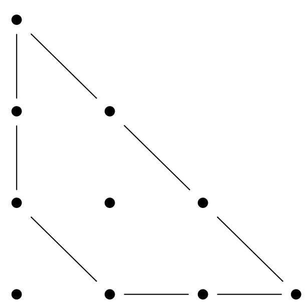
$$(s')^2 = \left(\frac{s}{(t-\alpha)^n}\right)^2 = \frac{q(t)}{(t-\alpha)^{2n-1}} = h\left(\frac{1}{t-\alpha}\right) = h(t'), \tag{1.38}$$

où on à développé $q(t)$ par Taylor en $(t - \alpha)$, et $\deg(h) = 2n - 1$. $\square$

Considérons maintenant le cas des **cubiques**, c'est à dire, une courbe définie par $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ de degré 3. Si on suivi le raisonement qu'on vient de faire, ceci correspond à une courbe hyperelliptique $s = p(t)$ avec $\deg(p(t)) = 3$. Par la Remarque 1.3.12, en fait on peut considérer que $\deg(p(t)) \leq 4$ et réécrire l'équation comme $(s')^2 = h(t')$ avec $\deg(h(t')) \leq 3$. Alors on a :

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{1.39}$$

la forme genérale d'une cubique qui est dite la **Forme de Weierstrass**. Le polygon de Newton correspondant à $f(x, y)$, si on fait une translation pour que $(0, 0) \in C$, on trouve qu'est inscrit dans :



En fait, on peut aussi nous débarasser du coefficient a et du terme x^2 (à condition que $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 3$), en obtenant :

$$y^2 = x^3 + px + q. \tag{1.40}$$

Proposition 1.3.13. *Soit C et D deux courbes irréductibles dans $\mathbb{A}^2$. Alors C et D sont birationnelement équivalentes ssi $K(C) \cong K(D)$.*

Démonstration. $\Rightarrow$) On a les applications rationnelles :

$$\begin{aligned} \Phi : C \dashrightarrow D, \quad \Phi = (\phi_1, \phi_2) \\ \Psi : D \dashrightarrow C, \quad \Psi = (\psi_2, \psi_2) \end{aligned} \tag{1.41}$$

et on peut considérer :

$$\begin{array}{ccc} K(C) & \longrightarrow & K(D) \\ h & \longmapsto & h \circ \Phi \end{array} \tag{1.42}$$

Voyons que cette construction est injective et surjective. Si on a :

$$h_1 \circ \Psi = h_2 \circ \Psi \Longrightarrow h_1 \circ \Psi \circ \Phi = h_2 \circ \Psi \circ \Phi, \tag{1.43}$$

c'est à dire, $h_1 = h_2$ sauf dans une finité de points, mais comme ce sont des classes de polynômes, cette égalité c'est partout. Si on a certain $l \in K(D)$, on notte que $(l \circ \Phi) \circ \Psi = l$ sauf dans une finité de points, mais (comme avant) cette égalité c'est partout, et on a que $l \circ \Phi \in K(C)$. Ceci monte la bijection.

$\Leftarrow$) On sait que $K(C) \cong K(D)$ et on veut trouver Ψ et Φ applications rationnelles pour faire C (définie par $f(x, y) = 0$) et D (définie par $g(r, t) = 0$) birationnellement équivalentes. Considérons C avec coordonnées (x, y) et D avec coordonnées (r, t). On a :

$$\begin{array}{ccc} K(C) & \longrightarrow & K(D) \\ x & \longmapsto & \phi_1 \\ y & \longmapsto & \phi_2 \\ \phi_1 & \longleftarrow\!\shortmid & r \\ \phi_2 & \longleftarrow\!\shortmid & t \end{array} \tag{1.44}$$

qui défini Ψ (les deux premières identifications) et Φ (les deux dernières identifications). On doit voire que si $p \in C$ ($f(p) = 0$), alors $\Phi(p) \in D$ ($g(\Phi(p)) = 0$). Mais :

$$g(\Phi(p)) = g \circ \Phi(p) = a(p)f(p) = 0, \tag{1.45}$$

car comme classes d'équivalence, $0 = g \in K(D)$, et alors si on compose avec Φ on obtien que $0 = g \circ \Phi \in K(C)$, de manière que $g \circ \Phi = af$ (comme polynômes) pour certain $a \in \mathbb{K}[x, y]$.

Clairement ce raisonnement est symmetrique, donc on obtien le résultat. $\square$

1.4 Points lisses et points singuliers

Définition 1.4.1. *Soit C une courbe dans $\mathbb{A}^2$ définie par $f(x, y) = 0$. Soit $p \in C$ un point. On dit que p est un* point singulier *de C quand :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0. \tag{1.46}$$

Si ceci ne passe pas, on dit que p est un point non singulier *(où un* point lisse*) de C. Si tous les points de C sont non singuliers, on dit que C est une* courbe non singulière.

Ceci peut être interprété en termes du polygon de Newton. On peut supposer que $(0,0) \in C$ est un point singulier, c'est à dire, le polynôme $f(x,y)$ qui définit la courbe n'a pas de constantes ni de termes linéaires dans une seule variable. De cette manière, le polygon de Newton ne contient pas $(0,0)$ ni $(0,1)$ ni $(1,0)$:

En fait, le polygon de Newton de $f(x,y)$ connait beaucoup de choses de la courbe C.

Proposition 1.4.2. *Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible définie par $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$. Alors C n'a qu'un nombre fini de points singuliers.*

Démonstration. Considérons les points singuliers p de $f(x,y) = 0$. On a :

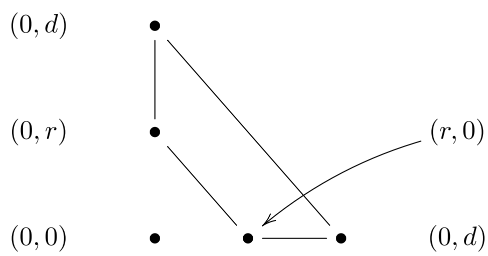
$$f(p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0. \tag{1.47}$$

Supposons qu'il y a un nombre infini de points singuliers. Alors, $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ sont divisibles par f (car il est irréductible et ils partagent un nombre infini de solutions). Mais comme ces dérivées ont un degré mineur, on doit avoir $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. Si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, on obtient que f est une constante, contradiction. Si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p \geq 0$, on obtient :

$$f(x,y) = \sum_{(i,h)} a_{ij} x^{ip} y^{jp} = \left(\sum_{(i,j)} a_{ij}^{1/p} x^i y^j \right)^p, \tag{1.48}$$

et doncs f n'est pas irréductible, contradiction. □

Définition 1.4.3. *Soit $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ et $p = (0,0)$. Soit $f(p) = 0$ et p un point singulier de f. Quand le polygone de Newton de f est contenu dans :*

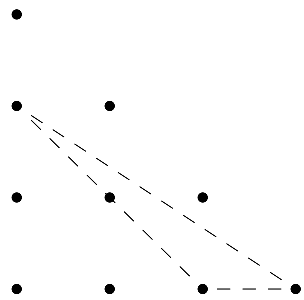


on dit que p est un point singulier d'ordre supérieur ou égale à r. *En particulier si $r = 2$ on dit que p est un point* double.

Quand on a $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ avec $(0,0)$ un point double, la première droite du polygon de Newton qui peut avoir des termes est celle de la forme de degré deux. Cette forme décompose en deux facteurs en x, qui peuvent être différents où le même (à multiplication par une constante près). De cette manière, on peut définir :

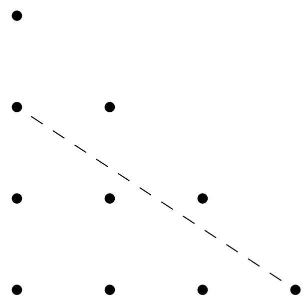
Définition 1.4.4. *Soit $f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ avec $p = (0,0)$ un point double. Si la forme de degré deux decómpose en $(\lambda_1 x + \mu_1 y)(\lambda_2 x + \mu_2 y)$, deux facteurs différents, on dit que p est un* point double non dégénéré. *Si la forme de degré deux decómpose en $a(\lambda x + \mu y)^2$, deux facteurs égales, on dit que p est un* point double dégénéré.

Exemple 1.4.5. 1. *Soit $f(x,y) = y^2 - x^2 - x^3$ à $\mathbb{C}$ (qui évidement satisfait* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$*), c'est à dire, $y^2 = x^2 + x^3$. Son polygon de Newton est :*



On a que $(0,0)$ est un point singulier double, et comme $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$, il est double non dégénéré.

2. *Soit $f(x,y) = y^2 - x^3$ à $\mathbb{C}$ (qui évidement satisfait* $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$*), c'est à dire, $y^2 = x^3$. Son polygon de Newton est :*



On a que $(0,0)$ est un point singulier double, et comme $y^2 = yy$, il est double non dégénéré.

Géomètriquement, un point singulier non dégénéré est localement un point où deux droites se coupent (Figure 1.4a) mais un point singulier dégénéré est localement un corne (Figure 1.4b).

(a) Point singulier non dégénéré.

(b) Point singulier dégénéré, où "cusp".

Figure 1.4 – Géomètrie locale d'un point singulier.

Proposition 1.4.6. *1. Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une conique irréductible. Alors C est non singulière. En particulier, pour $C \subset \mathbb{A}^2$ une cubique non singulière, alors C n'est pas rationnelle.*

2. Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une cubique définie par une équation de Weierstrass $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, posons $y = p(x)$. Alors cette cubique est non singulière ssi $p(x)$ est un polynôme à racines simples.

Démonstration. 1. Supposons que C est singulière, voyons que C est réductible. On peut considérer que $p = (0,0)$ est le point singulier de notre conique, de manière qu'on peut écrire le polyôme qui défini C comme :

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad \text{où même} \quad f(x,y) = x^2 + axy + by^2. \tag{1.49}$$

Alors, on peut factoriser :

$$0 = f(x,y) = x^2 + axy + by^2 \iff x = \frac{-ay \pm \sqrt{a^2y^2 - 4cy^2}}{2} = y\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}{2}, \tag{1.50}$$

et donc on peut reduir :

$$f(x,y) = \left(x - y\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4c}}{2}\right)\left(x - y\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4c}}{2}\right). \tag{1.51}$$

2. On peut supposer que l'origine $(0,0)$ appartient à la courbe.
$\Rightarrow$) Voyons que si $p(x)$ à une racine double, alors C est singulière. On peut supposer que $(0,0)$ est la racine double, donc $p(x) = x^2(ax+b)$. En particulier :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \end{cases} \tag{1.52}$$

et C est singulière en $(0,0)$.
$\Leftarrow$) Voyons que si C est singulière, alors $p(x)$ à une racine double. On peut supposer que $(0,0)$ est le point singulier, donc :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = c \end{cases} \tag{1.53}$$

et alors $p(x) = x^2(ax+b)$ à $(0,0)$ comme racine double.

□

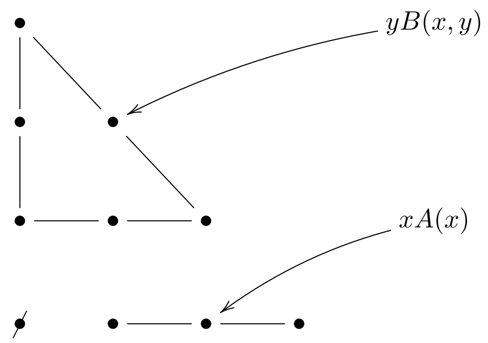
Théorème 1.4.7. *Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible et $p \in C$ un point lisse. Alors il existe une foction rationnelle t sur C telle que t est régulière en p, $t(p) = 0$ et pour toute fonction rationnelle non nulle $u \in K(C)$ il existe un nombre entier k tal que $u = t^k v$ où $v \in K(C)$ est régulière en p et $v(p) \neq 0$. De plus, u est régulière en p ssi $k \geq 0$.*

Démonstration. On peut supposer que $p = (0,0)$. Comme il est lisse, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0 \quad \text{où} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0, \quad \text{supposons} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0. \tag{1.54}$$

On afirme que la (classe de) la fonction x convient pour un tel t. Comme on est intéressés à la valeur en p, il suffit de vérifier la propiété demandée pour les fonctions u régulières en p.

Si $u(p) \neq 0$, en posant $k = 0$ la propiété est vérifiée pour $t = x$. Soit $u(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$ une fonction régulière en p telle que $u(p) = 0$. Comme p est un point lisse, on a que $f(x, y) = xA(x) + yB(x, y)$ avec $B(0, 0) \neq 0$ et alors son polygon de Newton est de la forme :



Sur la courbe C, on a que :

$$y = -\frac{xA(x)}{B(x,y)} \quad \text{et alors} \quad p(x,y) = p\left(x, -\frac{xA(x)}{B(x,y)}\right) = xu'(x,y), \tag{1.55}$$

où u' est une fonction régulière en p puis que $B(0, 0) \neq 0$. Donc :

$$u(x,y) = x\frac{u'(x,y)}{q(x,y)} \quad \text{avec} \quad \frac{u'(x,y)}{q(x,y)} \quad \text{régulière en } p. \tag{1.56}$$

Si $u'(p)/q(p) \neq 0$, on a fini. Si $u'(p)/q(p) = 0$, on peut répéter l'argument et sortire une autre x facteur commun. Il faut démontrer que ce procès s'arrête (c'est à dire, il est fini). Pour cela, on utilise un argument typique : on a l'Identité de Bézout pour $f(x, y)$ et $p(x, y)$ dans $\mathbb{K}(x)[y]$:

$$\xi f + \eta p = a(x) = x^k b(x) \quad \text{avec} \quad b(0) \neq 0. \tag{1.57}$$

Dans notre processus on ne peut pas obtenir $p(x, y) = x^l v(x, y)$ avec $l > k$, car si on suppose ceci sur C on obtient :

$$x^l \eta v = x^k b(x) \Longrightarrow x^{l-k}\eta v = b(x) \Longrightarrow b(0) = 0, \tag{1.58}$$

contradiction (ici on considère l'égalité entre polynômes, $b(x)$ à x facteur commun). □

Définition 1.4.8. *Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible, $p \in C$ un point lisse et t une fonction rationnelle sur C telle que t est régulière en p, $t(p) = 0$ et pour toute fonction rationnelle non nulle $u \in K(C)$ il existe un nombre entier k tal que $u = t^k v$ où $v \in K(C)$ est régulière en p et $v(p) \neq 0$. On dit que t est un* paramètre local *en p.*

Remarque 1.4.9. *Si on a $C \subset \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible avec deux paramètres locaux t et t' en $p \in C$, ils satisfaient $t' = tw$ pour $w \in K(C)$ régulière en p et $w(p) \neq 0$. Par consequence, le nombre k ne dépend pas du choix d'un paramètre local.*

Démonstration. Considérons t et t' deux paramétres locals. Comme elles mêmes sont fonctions rationnelles, on peut écrire :

$$t' = t^k w, \quad t = t'^l v, \tag{1.59}$$

pour certaines fonctions régulières $w, v \in K(C)$ avec $w(p) \neq 0 \neq v(p)$. Alors :

$$t = (t^k w)^l v = t^{kl} w^l v = t^{kl} u \Longrightarrow 1 = t^{kl-1} u, \tag{1.60}$$

où on rédefini la fonction régulière $u = w^l v \in K(C)$ avec $u(p) \neq 0$ et on a supposé $t \neq 0$. On notte que on a cette dernière égalité partout sauf pour $t = 0$, et cet ensemble est un ouvert. Comme on est dans une courbe irréductible, cet ouvert est dense et alors on a l'égalité partout. On a donc $kl = 1$, mais on ne peut pas avoir $k = l = -1$ car $t(p) = t'(p) = 0$, et alors $k = l = 1$ et $t' = tw$. □

Définition 1.4.10. *Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible et t est un* paramètre local *en $p \in C$. On appelle aux nombre entier k associé à t la* multiplicité de zéro de u en p.

Si nous sommes intéréssés par l'intersection de courbes, on doit en fait considérer la **multiplicité de points d'intersection de deux courbes**.

Définition 1.4.11. *Soit $C, D \subset \mathbb{A}$ deux courbes, C irréductible définie par $f(x, y) = 0$ et $C \not\subset D$, cette définie par $g(x, y) = 0$ (en particulier $f \nmid g$ et g définie une fonction rationnelle non nulle sur C). Soit $p \in C \cap D$ un point lisse de C. La* multiplicité d'intersection de C et D en p, *noté par $m_p(C, D)$, est la multiplicité de zéro de $g \in K(C)$ en p.*

Proposition 1.4.12. *Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une droite, $p = (\alpha, \beta) \in C$. L'équation d'une droite qui passe par p peut être écrite comme $x = \alpha + t\xi$ et $y = \beta + t\eta$. Soit D une courbe définie par $g(x, y) = 0$ et supposons $p \in D$. On écrit :*

$$g(x, y) = a(x - \alpha) + b(y - \beta) + h(x - \alpha, y - \beta), \tag{1.61}$$

avec chaque terme de $h(x - \alpha, y - \beta)$ de degré supérieur ou égale à 2. Alors :

1. *On a que t est un paramètre local de C en p.*
2. *Si p est un point singulier de D, alors $m_p(C, D) \geq 2$.*
3. *Soit p un point lisse de D. On a que $m_p(C, D) \geq 2$ ssi C est la droite tangente à D en p :*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(p)(x - \alpha) + \frac{\partial g}{\partial y}(p)(y - \beta) = 0. \tag{1.62}$$

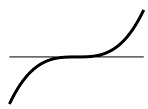


Figure 1.5 – Un point d'inflexion.

4. *Soit p est un point lisse de D. On a que $m_p(C, D) \geq 3$ ssi p est un point d'inflexion de D, c'est à dire :*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} (p) = 0. \tag{1.63}$$

Démonstration. 1. On notte que $(x - \alpha)/\xi = t = (y - \beta)/\eta$, et alors :

$$g(t) = a\xi t + b\eta t + h(t) = t(a\xi + b\eta + h'(t)), \tag{1.64}$$

où $h'(t)$ a chaque terme de degré supérieur ou égale à 1. Effectivement, t est un paramètre local de C en p.

2. On peut écrire :
$$h(x-\alpha, y-\beta) = a_1(x-\alpha)^2 + a_2(x-\alpha)(y-\beta) + a_3(y-\beta)^2 + \cdots \tag{1.65}$$
avec la reste de termes d'ordre supérieur. Soit p singulier de D. Alors :
$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha,\beta) = \frac{\partial g}{\partial(x-\alpha)}\frac{\partial(x-\alpha)}{\partial x} = a \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) = \frac{\partial g}{\partial(y-\beta)}\frac{\partial(y-\beta)}{\partial y} = b \end{cases} \tag{1.66}$$
et on peut écrire :
$$g(x,y) = h(x-\alpha, y-\beta) \Longrightarrow g(t) = t^2\tilde{h}(t) \tag{1.67}$$
avec $\deg(\tilde{h}) \geq 0$ si on pose $(x-\alpha)/\xi = t = (y-\beta)/\eta$.
3. $\Leftarrow$) On suppose que $g(x,y)$ est tal que :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(p)(x-\alpha) + \frac{\partial g}{\partial y}(p)(y-\beta) = 0. \tag{1.68}$$
Mais comme :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(\alpha,\beta) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) = b \Longrightarrow g(x,y) = h(x-\alpha, y-\beta), \tag{1.69}$$
et on sait que $\deg(h) \geq 2$, on peut aux minimum sortir facteur commun t^2 et $m_p(C,D) \geq 2$.
$\Rightarrow$) Si $m_p(C,D) \geq 2$, on peut éliminer le terme de degré 1 (les termes de degré 0 sont déja éliminés) et alors forcement :
$$0 = a(x-\alpha) + b(y-\beta) = \frac{\partial g}{\partial x}(p)(x-\alpha) + \frac{\partial g}{\partial y}(p)(y-\beta). \tag{1.70}$$
4. C'est un raisonement analogue au cas précédent (mais beaucoup plus longue, l'expansion en Taylor est moin directe). Si on écrit $g(x,y)$ en fonctions des derivés partielles, les conditions que $m_p(C,D) \geq 3$ sont exactement les mêmes que ce déterminent s'annulle.

$\square$

1.5 Courbes algébriques dans le plan projectif

Nous maintenons $\mathbb{K}$ un corps de base fixe (habituellement algébriquement clos).

Définition 1.5.1. *On défini* $\mathbb{P}^n$ *le* plan projectif de dimension n *comme :*
$$\mathbb{P}^n = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\} \Big/ (z_0,\ldots,z_n) = (\lambda z_0,\ldots,\lambda z_n) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{K}^\times. \tag{1.71}$$
On denote par $(z_0 : \ldots : z_n)$ *les* coordonnées homogènes *d'un point de* $\mathbb{P}^n$*. On a des* cartes affines *de* $\mathbb{P}^n$*, c'est à dire, des plongements* $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$*.*

Notons que en fait les éléments de $\mathbb{P}^n$ sont les droites de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Notons que on a multiples cartes affines possibles : pour un point $(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n$ avec $z_i \neq 0$, on peut associer $(z_0/z_1 : \ldots, z_{i-1}/z_i : 1 : z_{i+1}/z_i : \ldots : z_n/z_i)$, et alors on a $n+1$ cartes affines standards. Dans le cas spécial de $\mathbb{P}^2$, c'est à dire, $n=2$, on a trois cartes affines standards :
$$\begin{aligned} \mathbb{A}^2_0 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 | z_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2 \\ \mathbb{A}^2_1 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 | z_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2 \\ \mathbb{A}^2_2 &= \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 | z_2 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^2 \end{aligned} \tag{1.72}$$

Exemple 1.5.2. *1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, considérons $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On a plusieurs manières d'interpreter géométriquement ce plan projectif : car $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^2 \big/ p = A(p)$ sent A l'involution*

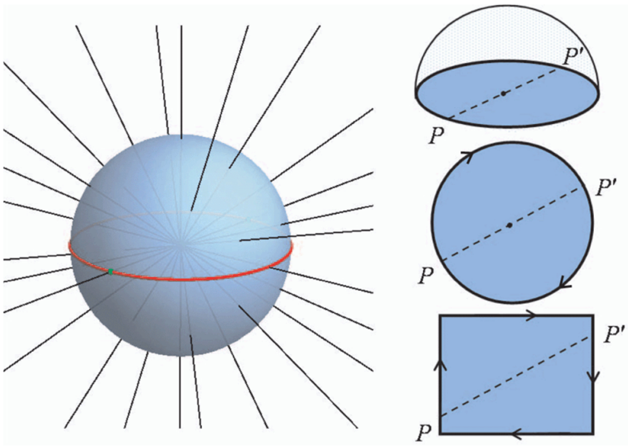


FIGURE 1.6 – Sphère $\mathbb{S}^2$ avec la transformation de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans le plan. Image de [4].

antipodale. Mais ici on a plus de structure, on peut considérer la topologie quocient de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \big/ (z_0 : z_1 : z_2) = (\lambda z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ no nul.

2. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On peut à nouveau considérer la topologie quocient de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} /_{\sim}$. C'est (du point de vue topologique) une varieté de dimension 4. On a aussi une conjugaison complexe sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{conj} : & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ & (z_0 : z_1 : z_2) & \longmapsto & (\overline{z_0} : \overline{z_1} : \overline{z_2}) \end{array} \tag{1.73}$$

et en fait on a comme homeomorphisme i com difféomorphisme (mais difficile à démonstrer) :

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \big/_{\mathrm{conj}} \cong \mathbb{S}^4 \tag{1.74}$$

3. *Le commu comme Jeu de Dobble rempli des cartes rondes avec 8 dessins dans chaque carte, avec la condition que si on prend deux cartes alors elles ont exactement un dessin en commun et en plus il n'y a pas des dessins qui apparaient dans toutes les cartes. Combient de cartes au maximum peut on avoir ?*
On laisse cette question comme exercice à remplir par le lecteur. Si on replace 8 par 7, la question devient béaucoup plus difficile.

Définition 1.5.3. *Une droite dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\} /_{\sim}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ projecté par la rélation d'équivalence $\sim$.*

Remarque 1.5.4. *On notte que deux droites distinctes dans $\mathbb{P}^2$ ont exactement un point en commun. C'est suffisant de voir que $y = x$ et $y = x + a$ pour $a \in \mathbb{K}$ se coupent dans un point. Mais si on écrit les coordonnées de ces droites et on fait $x \to \infty$:*

$$\begin{aligned} y = x &\longrightarrow (x : x : 1) \longrightarrow (1 : 1 : 0) \\ y = x + a &\longrightarrow (x : x + a : 1) \longrightarrow (1 : 1 : 0) \end{aligned} \tag{1.75}$$

et ils se coupent.

Voyons maintenant qu'est ce que une **courbe algébrique dans** $\mathbb{P}^2$ est.

Définition 1.5.5. *Une* courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2$ *est l'ensemble des solutions d'une équation* $F(z_0, z_1, z_2) = 0$ *où* $F \in \mathbb{K}[z_0, z_1, z_2]$ *est un polynôme homogéne à trois variables. On dit qu'une courbe algébrique est* irréductible *quand le polynôme* $F(z_0, z_1, z_2)$ *qui la défini est irréductible.*

On notte que si on a un polynôme $f(x, y)$, on peut le transformer pour avoir une transition de courbe affine à courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2$:

$$f(x,y) \leftrightsquigarrow z_2^d f\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) = F(z_0, z_1, z_2) \tag{1.76}$$

où d est le degré de f et F est un polynôme homogène de degré d. Si on a un polynôme homogène $F(z_0, z_1, z_2)$, on peut aussi le transformer pour avoir une transition de courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2$ à courbe affine :

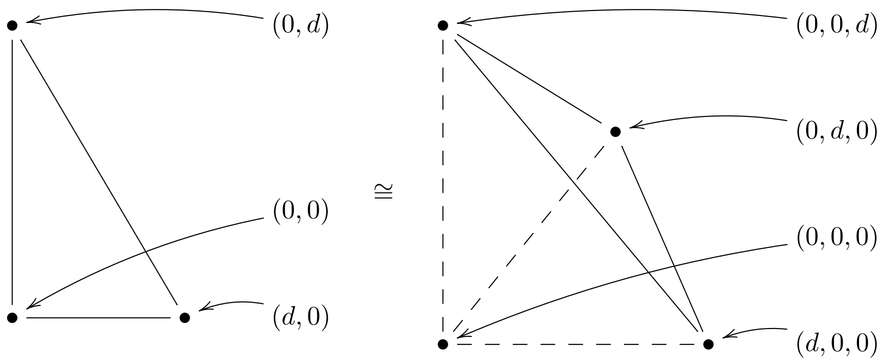
$$f\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right) = F\left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}, 1\right) \leftrightsquigarrow F(z_0, z_1, z_2) \tag{1.77}$$

à condition que $z_2 \neq 0$. Ce dernière transformation est en effet un plongement dans $\mathbb{A}^2_2$, mais le degré peut baisser : si le polynôme à un facteur z_2^d, il est transformé en l'unité. Quand $z_2 = 0$ est partie de la courbe, on l'oublie pour passer à les solutions affines.

Cette transformation pour passer du affin à projectif n'est pas un morphisme de polynômes, mais on veut quelque chose semblant. Avec ces transformations, pour chaque $d \in \mathbb{N}$ fixe on a une équivalence entre les espaces vectoriels :

$$\{f(x,y) \in \mathbb{K}[x,y,z] | \deg(f) \leq d\} \cong \{F(x,y,z) \in \mathbb{K}[x,y,z] \text{ homogène} \,|\, \deg(F) = d\} \tag{1.78}$$

équivalence qui peut être vue avec le polygon de Newton :



Quand on parle des courbes dans $\mathbb{P}^2$, on a les concepts semblants que en $\mathbb{A}^2$, et pour cela on utilise une des trois cartes affines standards ($\mathbb{A}^2_0$, $\mathbb{A}^2_1$ et $\mathbb{A}^2_2$) : avec les coordonnées $(z_0 : z_1 : z_2)$ correspondantes. Pour chaque courbe $C \subset \mathbb{P}^2$ et point $p \in C$ on peut déterminer une carte et considérer les notions qu'on à pour p (comme point lisse), et ces notions ne dépend pas du choix de la carte.

Proposition 1.5.6. *Soit* $C \subset \mathbb{P}^2$ *une courbe algébrique définie par* $F(z_0, z_1, z_2) = 0$ *avec* F *un polynôme homogène et* $p \in C$.

1. *On a que* p *est singulier ssi :*

$$\frac{\partial F}{\partial z_0}(p) = \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) = \frac{\partial F}{\partial z_2}(p) = 0, \tag{1.79}$$

et en fait si ces trois conditions se satisfaits, alors $F(p) = 0$.

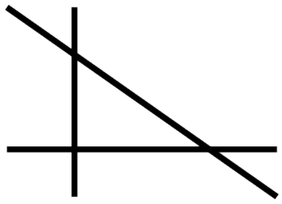


FIGURE 1.7 – Plan projectif avec les droites $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$.

2. *Si p est un point non singulier de C, la droite tangente à C en p est donnée par :*

$$\frac{\partial F}{\partial z_0}(p)z_0 + \frac{\partial F}{\partial z_1}(p)z_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2}(p)z_2 = 0. \tag{1.80}$$

3. *Si p est un point non singulier de C, alors p est un point d'inflexion de C ssi :*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial z_0^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_0 \partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_0 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_0} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_0} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial z_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} \end{vmatrix} (p) = 0. \tag{1.81}$$

Démonstration. Le raisonement est complétement analogue à la Proposition 1.4.12. La seule chose supplémentaire qu'on peut utiliser c'est que pour tout polynôme homogène $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, posons $\deg(F) = d$, on a :

$$dF(x_0, x_1, x_2) = x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2) + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2). \tag{1.82}$$

Ceci est démonstrer terme par terme : soit $x_0^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$ avec $k_0 + k_1 + k_2 = d$. Alors :

$$(k_0 + k_1 + k_2)x_0^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = x_0(k_0 x_0^{k_0-1} x_1^{k_1} x_2^{k_2}) + x_1(k_1 x_0^{k_0} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2}) + x_2(k_2 x_0^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2-1}) \tag{1.83}$$

est l'égalité que montre le résultat qu'on veut. □

Considérons maintenant l'analogue des **fonctions rationelles** et **applications rationelles** pour le cas projectif. Pour une application rationelle $u(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$ on peut faire le changement de variables $x = z_0/z_2$, $y = z_1/z_2$ en $\mathbb{A}_2^2$, et alors on obtient :

$$u(x, y) = \frac{p(z_0/z_2, z_1/z_2)}{q(z_0/z_2, z_1/z_2)} = \frac{P(z_0, z_1, z_2)}{Q(z_0, z_1, z_2)} \tag{1.84}$$

où P et Q sont des polynômes homogènes de même degré. Pour cela, on transforme $p(x, y)$ à $z_2^{\deg(p)} p(z_0/z_2, z_1/z_2)$ et $q(x, y)$ à $z_2^{\deg(q)} q(z_0/z_2, z_1/z_2)$. Supposons que $\deg(p) > \deg(q)$, alors il suffit de multiplier le dénominateur par $z_2^{\deg(p)-\deg(q)}$ pour obtenir ce qu'on affirme. De cette forme seront nos fonctions rationelles.

Définition 1.5.7. *Soit C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^2$ définie par un polynôme $F(z_0, z_1, z_2)$ homogène. Les* fonctions rationelles *sur C sont les fonctions :*

$$\frac{P(z_0, z_1, z_2)}{Q(z_0, z_1, z_2)} \quad \text{telles que} \quad F \nmid Q, \tag{1.85}$$

sent P et Q des polynôme homogènes de même degré. On a aussi une notion d'équivalence de deux fonctions rationelles U_1, U_2 sur C :

$$\frac{P_1(z_0,z_1,z_2)}{Q_1(z_0,z_1,z_2)} \sim \frac{P_2(z_0,z_1,z_2)}{Q_2(z_0,z_1,z_2)} \iff P_1Q_2 - P_2Q_1 \quad \textit{est divisible par} \quad F. \tag{1.86}$$

Pour une application rationelle affine, on avait :

$$\Phi(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y)) \rightsquigarrow \left(\frac{A(z_0,z_1,z_2)}{C(z_0,z_1,z_2)}, \frac{B(z_0,z_1,z_2)}{C(z_0,z_1,z_2)}\right) \tag{1.87}$$

où on a fait le changement de variables d'affine à projectif, sent A, B et C des polynômes homogènes de même degré (si c'est nécessaire on peut multiplier pour mantenir le même degré)

Définition 1.5.8. *Une* application rationelle de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^2$ *est une application de la forme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (z_0 : z_1 : z_2) & \longmapsto & (A(z_0,z_1,z_2) : B(z_0,z_1,z_2) : C(z_0,z_1,z_2)) \end{array} \tag{1.88}$$

où au moins un des polynômes A, B, C est non nul.

Unne telle application est dite régulière *en $p = (z_0^0, z_1^0, z_2^0)$ si au moins un des polynômes A, B, C ne s'anulle pas en p.*

Comme c'est nécéssaire, les points équivalents de $\mathbb{P}^2$ vont aux points équivalents à travers des applications rationelles en $\mathbb{P}^2$. On notte que toute application rationelle projective vient d'une affine à condition qu'on choisi correctement $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$.

Définition 1.5.9. *Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible définie par $F(z_0,z_1,z_2) = 0$. Une* application rationnelle sur C *est une application de la forme :*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & (z_0 : z_1 : z_2) & \longmapsto & (A(z_0,z_1,z_2) : B(z_0,z_1,z_2) : C(z_0,z_1,z_2)) \end{array} \tag{1.89}$$

où au moins un des polynômes A, B, C n'est pas divisible par F.

Pour deux applications rationnelles sur C, on a une notion d'équivalence :

$$(A_1 : B_1 : C_1) \sim (A_2 : B_2 : C_2) \quad \textit{quand} \quad \begin{array}{l} A_1B_2 - A_2B_1, \\ A_1C_2 - A_2C_1, \\ B_1C_2 - B_2C_1 \end{array} \quad \textit{ne sont pas divisibles par} \quad F, \tag{1.90}$$

et être régulière en $p = (z_0^0, z_1^0, z_2^0) \in C$ *veut dire qu'il existe un réprésentant $(A : B : C)$ tal que au moins un des polynômes A, B, C est non nul en p.*

*On a aussi les notions d'*application rationnelle *entre deux courbes C et D et la notion d'*isomorphisme birationnel.

Si on commence par une courbe irréductible C dans $\mathbb{P}^2$, faire une transformation pour passer à une courbe en $\mathbb{A}^2$ nous donne un isomorphisme entre $K(C)$ à $\mathbb{P}^2$ et $K(C)$ à $\mathbb{A}^2$.

Théorème 1.5.10. *Soit C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^2$ et soit Φ une application rationelle sur C. Alors Φ est régulière en tout point lisse de C.*

Démonstration. On choisi $p \in C$ lisse, supposons $p \in \mathbb{A}^2_2$. On peut écrire notre application de la forme :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{\mathbb{A}^2_2} : & \mathbb{A}^2_2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (u_0(x,y) : u_1(x,y) : u_2(x,y)) \end{array} \tag{1.91}$$

avec u_0, u_1 et u_2 des fonctions rationelles sur C, au moins une d'elles non nule sur C. Comme $p \in \mathbb{A}^2_2$, ces trois fonctions sont régulières en p, et on peut les réécrire à l'aide d'un paramètre local comme :

$$u_i = t^{k_1} v_i, \quad v_i(p) \neq 0 \quad i = 0, 1, 2 \tag{1.92}$$

où v_i est régulière en p pour $i = 0, 1, 2$. De plus, on peut supposer que $k_i \geq 0$ pour $i = 0, 1, 2$, et si on divise (u_0, u_1, u_2) par $t^{\min\{k_0, k_1, k_2\}}$ on obtient une composant $v_i(p) \neq 0$, et alors Φ est régulière en p. □

Corollaire 1.5.11. *Soit $C, D \subset \mathbb{P}^2$ deux courbes non singulières irréductibles et $\Phi : C \dashrightarrow D$ un isomorphisme birrationnel. Alors Φ est régulier en tous les points de C et établit une bijection entre C et D.*

Démonstration. EXERCICE. □

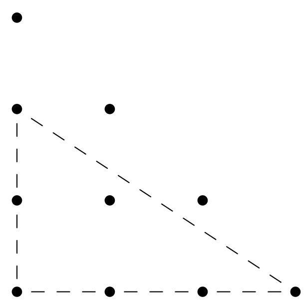
Exemple 1.5.12.

1. *Quand on fait une transformation de $\mathbb{A}^2$ à $\mathbb{P}^2$, dans ce dernier on trouve toutes les solutions qu'on avait dans le premier et en plus quelque chose à l'infini.*
2. *Pour les automorphismes birationnels de $\mathbb{P}^1$, où on peut penser $\mathbb{P}^1 \cong \{z_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$. Tous sont de la forme :*

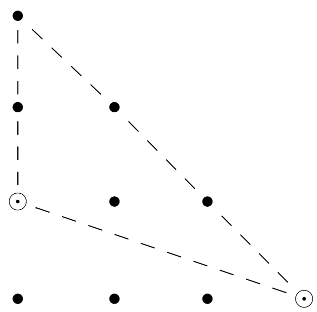
$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & & (z_0 : z_1) & \longmapsto & (az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1) \end{array} \tag{1.93}$$

où $ad - bc \neq 0$. En particulier si $\Phi \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1}$, alors il a au plus deux points fixes. De plus, ceci passe pour toute courbe rationelle : une courbe $C \subset \mathbb{P}^2$ est rationnelle sii C est birationnellement isomorphe à $\mathbb{P}^1$. En particulier, les automorphismes de C courbe rationelle ont au plus deux points fixes.

3. *Considérons la courbe C définie par $y^2 = x^3 + px + q$ dans $\mathbb{A}^2$, qui est non singulière. Sa transformation dans $\mathbb{P}^2$ est $z_1^2 z_2 = z_0^3 + pz_0 z_2^2 + qz_2^3$. On affirme que dans $\mathbb{P}^2$ cette courbe est non singulière. D'un autre coté, regardons le polygon de Newton dans $\mathbb{A}^2_2$:*



qui avec une autre carte peut être vu comme :



où les points marqués déterminent l'origine. Notre cubique particulière à l'automorphisme birationnel :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & C & \longrightarrow & C \\ & & (x, y) & \longmapsto & (x, -y) \end{array} \tag{1.94}$$

et on affirme qu'il y a quatre points de C qui restent fixes par Φ (trois solutions de la courbe dans $\mathbb{A}^2$ et le point de l'infini). En particulier, ceci signifie que la courbe n'est pas rationelle. Ces type de courbes on l'apelle courbes ***ellyptiques****.*

Démonstration. 1. Ceci est clair, car en ajouter une variable pour homogénéiser on maintien tous les zéros d'avant, et si on pose la nouvelle variable égale à zéro, on obtient des points supplémentaires à l'infini.

2. Cette applicaiton Φ est un automorphisme birationnel car on peut trouver (avec un calcul de matrices par exemple) l'inverse :

$$\begin{array}{rccc} \Phi^{-1} & : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & & (z_0 : z_1) & \longmapsto & \frac{1}{ad-bc}(dz_0 - bz_1 : -cz_0 + az_1) \end{array} \tag{1.95}$$

et celle ci est bien définie précisement quand $ad - bc \neq 0$. De plus, tout automorphisme birationnel a nécéssairement à chaque composante un polynôme de degré 1 car on est das un corps algébriquement clos (et si le degré est supérieur on perd l'injectivité car on a plusierures solutions pour chaque point de $\mathbb{P}^1$).

Clairement on a que $\Phi \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1}$ ne peut avoir que deux points fixes, car on a deux équations à deux variables.

Les conditions d'être $C \subset \mathbb{P}^2$ rationnelle et C birationnellement isomorphe à $\mathbb{P}^1$ sont en fait la même, car on demande dans le premier cas que quand on regarde C dans une carte affine on à $K_{\mathbb{P}^2}(C) \cong K_{\mathbb{A}^2} \cong \mathbb{K}(t)$ et dans le deuxième par le Corollaire 1.5.11 on a $K(C) \cong K(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{K}(t)$.

3. Clairement la courbe est non singulière, car si $f(x, y) = x^3 + px + q - y^2$ on a :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + p \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \end{cases} \tag{1.96}$$

mais les points $(0, i\sqrt{p/3})$ et $(0, -i\sqrt{p/3})$ n'appartient pas à C.

Un calcul (considérablement) long montre que sa transformation dans $\mathbb{P}^2$ est non singulière. Pour cela, on peut considérer les trois projections dans les cartes affines $\mathbb{A}^2_0$, $\mathbb{A}^2_1$ et $\mathbb{A}^2_2$, imposer les conditions de point singulier et obtenir différents points candidats. Mais quand on regarde ces points dans $\mathbb{P}^2$, aucun n'est vraiment un point singulier, et alors la transformation est non singulière.

Pour trouver les points fixes par Φ, on appelle α_1, α_2 et α_3 les trois solutions de $p(x) = 0$. Clairement les points $(\alpha_i, 0)$ pour $1 = 1, 2, 3$ sont points fixes de C par Φ. Si on considère C en coordonnées homogènes, l'automorphisme Φ est :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & C & \longrightarrow & C \\ & & (x : y : z) & \longmapsto & (x : -y : z) \end{array} \tag{1.97}$$

car on ne touche pas la coordonnée z. En ce cas, on a une solution supplémentaire $(0 : 1 : 0)$ qui reste invariant par Φ, consequence de que $(0 : 1 : 0) = (0 : -1 : 0)$ dans $\mathbb{P}^2$.

□

Maintenant nous nous intéréssons au Théorème de Bézout, et on le démonstre en deux cas particuliers.

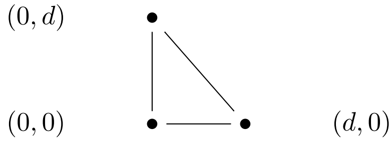
Théorème 1.5.13 (dé Bézout). *Soit $C, D \subset \mathbb{P}^2$ telles que C est irréductible et lisse et $C \not\subset D$. Alors la somme de multiplicités d'intersection de C et D en leurs points d'intersection est égale au produit des degrés de C et D.*

Démonstration. 1. Supposons que $\deg(C) = 1$. On choisit maintenant un système de coordonnées dans $\mathbb{P}^2$ de telle façon que :

(a) la droite définie par $z_2 = 0$ ne contient pas aucun point de $C \cap D$,

(b) C soit définie par $z_1 = 0$.

Alors $(1 : 0 : 0) \notin D$, le seul point d'intersection entre $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$. Par la première condition, on peut considérer la carte affine $\mathbb{A}^2_2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{z_2 = 0\}$, avec $(x, y) = (z_0/z_2, z_1/z_2)$. Ici, D est définie par le polynôme $g(x, y)$, et on doit considérer g comme une fonction sur C, c'est à dire, le polynôme $g(x, 0)$. Maintenant pour tout point $(\alpha, 0) \in C \cap \mathbb{A}^2_2$ la fonction $x - \alpha$ est un paramètre local de C en $(\alpha, 0)$ (comme on a vu à la démonstration du Théorème 1.4.7). Alors, la multiplicité d'intersection de C et D en $(\alpha, 0)$ est la multiplicité de la racine α dans $g(x, 0)$, et pour cela la somme des multiplicités des points d'intersection de C et D est égal à la somme des multiplicités des racines de $g(x, 0)$. Il reste à voire que si $\deg(D) = d$, alors $\deg(g(x, 0)) = 0$. Si D dans $\mathbb{P}^2$ est définie par $G(z_0, z_1, z_2) = 0$, alors $g(x, y) = G(z_0/z_2, z_1/z_2, 1) = 0$ défini la courbe à $\mathbb{A}^2_2$, avec le polygon de Newton de g :



Et comme $(1 : 0 : 0) \notin D$, on a que $G(z_0, z_1, z_2)$ contient un terme z_0^d et alors $(0, d)$ est dans le polygon de Newton de g, et alors $g(x, 0)$ est de degré d.

2. Supposons que C est une conique lisse. On choisit un système de coordonnées dans $\mathbb{P}^2$ tel que on montre à la Figure 1.8 :

(a) pour un certain $p \in C$, $p \notin D$, la droite définie par $z_2 = 0$ soit la tangente à C en P,

(b) la droite $z_0 = 0$ passe par p et est différente à $z_2 = 0$ (la tangente antèrieure).

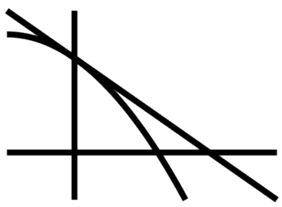
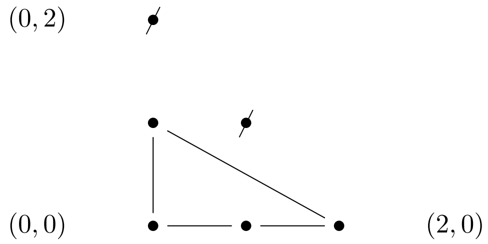


FIGURE 1.8 – Choix de coordonnées $(z_0 : z_1 : z_2)$, on a $p = (0 : 1 : 0)$.

À nouveau, on peut considérer la carte affine $\mathbb{A}^2_2$, car tous les point d'intérsection sont dedans : $C \cap D \subset \mathbb{A}^2_2$. On a C définie par F dans $\mathbb{P}^2$. Dans $\mathbb{A}^2_2$, la courbe C est une parabole :

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0. \tag{1.98}$$

Car si on regarde son polygon de Newton, on a :



avec $(0,2)$ en dehors car $p \in C$, et alors un terme y^2 ferait que on aurait un z_1^2 dans le polynôme homogène qui ne s'annullerait pas, et avec $(1,1)$ en dehors car C à $z_2 = 0$ comme tangente en p, et alors :

$$z_2 = 0 = \frac{\partial F}{\partial z_0}(p) z_0 + \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) z_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2}(p) z_2, \tag{1.99}$$

mais sin on associe le coéfficient a_{ij} à $z_i z_j$ dans $F(z_0, z_1, z_2)$ on a :

$$\frac{\partial F}{\partial z_0}(p) = a_{00}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_1}(p) = a_{11}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_2}(p) = a_{22}, \tag{1.100}$$

et alors $a_{00} = a_{11} = 0$ et $a_{22} = 1$. Notons que ce raisonement nous donne directement l'absence de $(0,2)$ dans le polygon de Newton.
Posons $g(x,y) = 0$ la courbe qui défini D dans $\mathbb{A}^2_2$, soit $\deg(D) = d$. Comme $p \notin D$, on a que g contient un monôme de la forme ξy^d avec $\xi \neq 0$. Maintenant, pour tout point $(x_0, y_0) \in C \cap \mathbb{A}^2_2$ tel que $x_0 = \alpha$ la fonction $x - \alpha$ est un paramètre local de C en ce point (car elle factorise $ax^2 + bx + c$). Alors, la multiplicité d'intersection de C et D en (x_0, y_0) est égale à la multiplicité de la racine α du polynôme $g(x, ax^2 + bx + c)$. De plus, $g(x, ax^2 + bx + c)$ est un polynôme de degré $2d$.

□

Théorème 1.5.14 (de Pascal)**.** *Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une conique lisse et A un hexagon inscrit dans C dans le quel con peut identifier les trois droites l_1, l_2, l_3 et les trois droites m_1, m_2, m_3 qui forment l'hexagon (posons L_i la droite définie par $l_i = 0$ et M_i celle définie par $m_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$). On a que les points $L_1 \cap M_1$, $L_2 \cap M_2$ et $L_3 \cap M_3$ sont alignés.*

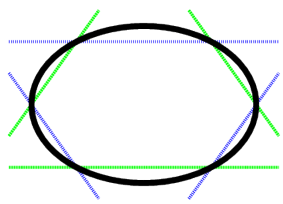


FIGURE 1.9 – Disposition des droites du Théorème de Pascal : l_i en vert et m_i en bleu, $i = 1, 2, 3$.

Démonstration. On considère la famille de cubiques (pour λ un paramètre) :

$$D_\lambda : \quad l_1 l_2 l_3 + \lambda m_1 m_2 m_3 = 0. \tag{1.101}$$

Soit $p = (z_0^0, z_1^0, z_2^0) \in C$ en dehors de les sommets de l'hexagon : $p \notin L_i$ et $p \notin M_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Il existe un valeur de λ tal que $p \in D_\lambda$, car en imposer la condition :

$$l_1(p)l_2(p)l_3(p) + \lambda m_1(p)m_2(p)m_3(p) = 0 \tag{1.102}$$

on obtien une équation linéaire en λ, avec solution puis que $p \notin M_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors par le Théorème de Bézout appliqué à C et D_λ, on a que $C \subset D_\lambda$: si $C \not\subset D_\lambda$, on doit avoir $2 \cdot 3 = 6$ points d'intersection, mais chaque sommet et p font 7. Alors $D_\lambda = C \cup L$, où L est une droite, et cette droite contient $L_1 \cap M_1$, $L_2 \cap M_2$ et $L_3 \cap M_3$. $\square$

Chapitre 2

Variétés algébriques affines

2.1 Définitions

On utilisait déjà $\mathbb{A}^n$ pour l'espace affine $\mathbb{K}^n$ et que les éléments de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sont des fonctions sur $\mathbb{A}^n$. À nouveau, $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si on ne dit pas le contraire.

Définition 2.1.1. *À chaque $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ on peut associer $Z(f) \subset \mathbb{A}^n$ le* lieu des zéros de *f. Soit $T \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, on peut associer $Z(T) \subset \mathbb{A}^n$ le* lieu des zéros comuns des polynômes de *T et $\mathfrak{a}(T) \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'*idéal engendré par *T.*

Proposition 2.1.2. *Soit $T \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Alors $Z(T) = Z(\mathfrak{a}(T))$.*

Démonstration. Voyons que $Z(T) \subset Z(\mathfrak{a}(T))$. Soit $p \in Z(T)$, alors pour tout $f \in T$ on a que $f(p) = 0$. Comme pour tout élément $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \in \mathfrak{a}(T)$ on a que $f_i \in T$, alors $a_1 f_1(p) + \cdots + a_n f_n(p) = 0$ et $p \in Z(\mathfrak{a}(T))$.

Voyons que $Z(\mathfrak{a}(T)) \subset Z(T)$. Soit $p \in Z(\mathfrak{a}(T))$, alors en particulier $f(p) = 0$ pour tout $f \in T$ et donc $p \in Z(T)$. $\square$

Définition 2.1.3. *Un sous ensemble $Y \subset \mathbb{A}^n$ de la forme $Y = Z(T)$ pour un certain $T \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ s'appelle un* sous ensemble algébrique fermé *de $\mathbb{A}^n$.*

Aux sous ensembles algébriques fermés on les appelle souvent seulement sous ensembles algébriques où sous ensembles fermés.

Proposition 2.1.4. *On a que :*

1. *à la fois $\emptyset$ et $\mathbb{A}^n$ sont sous ensembles fermés de $\mathbb{A}^n$,*
2. *si Y_1 et Y_2 sont des sous ensembles algébriques fermés de $\mathbb{A}^n$, alors $Y_1 \cup Y_2$ est un sous ensemble algébrique fermé de $\mathbb{A}^n$.*
3. *si $(Y_\alpha)_\alpha$ est une famille de sous ensembles algébriques fermés de $\mathbb{A}^n$, alors $\cap_\alpha Y_\alpha$ est un sous ensemble algébrique fermé de $\mathbb{A}^n$.*

Démonstration.

1. On a que $\emptyset = Z(\{1\})$ et $\mathbb{A}^n = Z(\{0\})$.
2. Soit $Y_1 = Z(T_1)$ et $Y_2 = Z(T_2)$, alors $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 \cdot T_2)$. Si $p \in Y_1 \cup Y_2$ alors ou bien pour tout $f_1 \in Z(T_1)$ on a $f_1(p) = 0$, ou bien pour tout $f_2 \in Z(T_2)$ on a $f_2(p) = 0$, c'est à dire, $p \in Z(T_1 \cdot T_2)$. Si $p \in Z(T_1 \cdot T_2)$ alors $f_1(p)f_2(p) = 0$ pour tout $f_1 \in T_1$ et $f_2 \in T_2$, donc où bien $f_1(p) = 0$ et $p \in Y_1 \subset Y_1 \cup Y_2$ où bien $f_2(p) = 0$ et $p \in Y_2 \subset Y_1 \cup Y_2$.

3. EXERCICE.

□

Autrement dit, on a une topologie sur $\mathbb{A}^n$ dans laquelle les ensembles fermés sont les sous ensembles algébriques fermés.

Définition 2.1.5. *La topologie sur $\mathbb{A}^n$ où les fermés sont définis par les sous ensembles algébriques fermés de $\mathbb{A}^n$ s'appelle la* topologie de Zariski de $\mathbb{A}^n$.

Définition 2.1.6. *Un sous ensemble Y algébrique fermé de $\mathbb{A}^n$ s'appelle* hipersurface *si $Y = Z(f)$ pour certain $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Remarque 2.1.7. *L'anneau $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est factoriel (on à une décomposition en facteurs irréductibles) et noethérien (tout idéal est engendré par un nombre finit d'éléments).*

Exemple 2.1.8. *Considérons la topologie de Zariski dans deux cas :*

1. *$\mathbb{A}^1$: on est sur $\mathbb{K}[x]$, où tout idéal est principal. Alors pour $Z \subset \mathbb{A}^1$ un sous ensemble algébrique fermé on a que $Z = Z(f)$ pour $f \in \mathbb{K}[x]$. Alors les fermés sont $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ et les collections finies de points.*
   *Notons que cette topologie n'est pas Hausdorff, mails il vérifie la propiété **T1** : chaque point est fermé. Cette topologie permet donner un exemple de connexe qui est union dénombrable de fermés :*
   $$C = \coprod_i F_i \tag{2.1}$$
2. *$\mathbb{A}^2$: les fermés sont $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ et les courbes algébriques union une collection finie de points.*
   Les deux premiers fermés sont clairs. Que les courbes algébriques union une collection finie de points est fermé est aussi clair, car une courbe algébrique est un fermé ($Z(f)$ pour un certain $f \in \mathbb{K}[x, y]$), les points sont fermés ($Z(x - \alpha, y - \beta)$) et l'union de fermés est un fermé. Pour voir que ils sont les seuls, on considère un fermé général $Z(T)$ avec $T \subset \mathbb{K}[x, y]$, posons $T = (f_1, \ldots, f_n)$. Si $f_1, \ldots, f_n$ n'ont pas des facteurs en commun, alors ils déterminent (par le Lemme 1.1.3) une collection finie de points. Soit f le majeur diviseur commun, on réécrit $T = (fg_1, \ldots, fg_n)$ et on a que $Z(T)$ est l'union de $f(x, y) = 0$ (une courbe algébrique) et les zéros communs de $g_1, \ldots, g_n$, qui sont une collection finie de points (peut être vide) par le Lemme 1.1.3.

Proposition 2.1.9. *L'espace affine $\mathbb{A}^n$ est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.*

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 2.1.10. *Soit X un espace topologique. Un sous ensemble non vide $Y \subset X$ est dit irréductible si on ne peut pas le représenter sous la forme $Y = Y_1 \cup Y_2$ avec $Y_1 \subsetneq Y$, $Y_2 \subsetneq Y$ des fermés de Y.*

Proposition 2.1.11. *En topologie générale :*

1. *Soit X un espace topologique irréductible, $Y \subset X$ un ouvert non vide. Alors Y est irréductible et dense.*
2. *Soit $Y \subset X$, Y irréductible. Alors $\overline{Y}$ est irréductible.*

Démonstration. EXERCICE. □

Proposition 2.1.12. *L'espace affine $\mathbb{A}^n$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.*

Démonstration. EXERCICE. □

Définition 2.1.13. *Un sous ensemble algébrique irréductible de $\mathbb{A}^n$ s'appelle une* variété algébrique affine.

2.2 Le Théorème des Zéros de Hilbert

On a deux applications qui rélationnent de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et $\mathbb{A}^n$: pour chaque idéal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ on peut associer $Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^n$ son lieu des zéros, et inversement pour un sous ensemble $Y \subset \mathbb{A}^n$ on peut associer $I(Y)$ l'idéal de tous les polynômes qui s'annullent sur Y. On veut étudier ces applications Z et I, on s'interesse à ses propiétés.

Proposition 2.2.1. *On a pour $\mathfrak{a}, T_1, T_1 \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ($\mathfrak{a}$ idéal), $Y, Y_1, Y_1 \subset \mathbb{A}^n$:*

1. $T_1 \subset T_2 \Longrightarrow Z(T_1) \supset Z(T_2)$,
2. $Y_1 \subset Y_2 \Longrightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$,
3. $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$,
4. $Z(I(Y)) = \overline{Y}$,
5. $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] | f^r \in \mathfrak{a}$ *pour certain* $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Démonstration.
1. EXERCICE.
2. EXERCICE.
3. EXERCICE.
4. C'est clair que $Z(I(Y)) \supset \overline{Y}$ puis que à gauche on a un fermé qui contient Y. On démonstre que $Z(I(Y)) \subset \overline{Y}$. Soit W un fermé tal que $W \supset Y$, posons $W = Z(\mathfrak{a})$ pour un idéal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, et alors $Z(\mathfrak{a}) \supset Y$. Mais :
$$\mathfrak{a} \subset I(Z(\mathfrak{a})) \subset I(Y) \Longrightarrow W = Z(\mathfrak{a}) \supset Z(I(Y)) \Longrightarrow Z(I(Y)) \subset \overline{Y}. \tag{2.2}$$
5. C'est une consequence du Théorème des Zéros de Hilbert.

□

Remarque 2.2.2. *Pour démontrer le* ***Théorème des Zéros de Hilbert*** *on utilise la Proposition 2.2.26 (qu'elle même est un cas particulier du Théorème des Zéros de Hilbert en prenant $f(x_1, \dots, x_n) = 1$), qui justifie pourqui si $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est un idéal engendré par $f_1, \dots, f_k$ tal que $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$, alors il existe $g_1, \dots, g_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que :*

$$g_1 f_1 + \dots + g_k f_k = 1, \tag{2.3}$$

et on a une sorte d'Identité de Bézout.

Ce qui suit le Théorème des Zéros de Hilbert nous servira pour dévélopper les instruments nécéssaires pour démonstrer cette Proposition.

Théorème 2.2.3 (dez Zéros de Hilbert)**.** *Soit $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un idéal et $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $Z(\mathfrak{a}) \subset Z(f)$. Alors $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.*

Démonstration. Voyons que la Proposition 2.2.26 implique le cas général. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_k$ et $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tel que $Z(\mathfrak{a}) \subset Z(f)$. Considérons $\mathfrak{a}' \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$ l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_n, 1 - yf$. Le lieu des zéros de $\mathfrak{a}'$ est vide, car si $f_1, \dots, f_k$ s'annullent alors f aussi et $1 - yf$ ne s'annulle pas. Par la Remarque 2.2.2 on a qu'il existe des polynômes $g_1, \dots, g_k, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$ tal que :

$$g_1 f_1 + \dots + g_n f_n + g(1 - yf) = 1, \tag{2.4}$$

et si on pose $y = 1/f$ on peut simplifier en multiplicant par une puissance de f et obtenir :

$$g'_1 f_1 + \dots + g'_k f_k = f^r, \tag{2.5}$$

et alors $f^r \in \mathfrak{a}$ donc $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

En principi, comme ceci est une égalité de polynômes, la démonstration finit ici. Mais on peut avoir des remords quand on pense aux points $p \in \mathbb{A}^n$ tal que $f(p) = 0$. Pour cela, comme on a vu que $f^r \in \mathfrak{a}$ hors de ces points, on peut écrire :

$$\mathbb{A}^n = Z(g_1' f_1 + \cdots + g_k' f_k - f^r) \cup Z(f), \tag{2.6}$$

mais comme $\mathbb{A}^n$ est irréductible on ne peut pas avoir une telle décomposition, et doncs l'égalité $g_1' f_1 + \cdots + g_k' f_k = f^r$ se préserve aussi pour les points où f s'annulle. □

Corollaire 2.2.4. *Les applications Z et I donnent une bijection entre les sous ensembles algébriques de $\mathbb{A}^n$ et les idéaux radicaux de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. De plus, un sous ensemble algébrique est irréductible ssi son idéal est premier.*

Démonstration. Par la Proposition 2.2.1, la première affirmation est évidente. Voyons la deuxième.

$\Rightarrow$) Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ un sous ensemble algébrique irréductible. On veut voir que $I(Y)$ est premier. Soit $fg \in I(Y)$, alors on a que $Y \subset Z(f) \cup Z(g)$ mais Y est irréductible, doncs $Y \subset Z(f)$ où $Y \subset Z(g)$, et alors $f \in I(Y)$ où $g \in I(Y)$ et par conséquence $I(Y)$ est premier.

$\Leftarrow$) EXERCICE. □

Exemple 2.2.5.

1. *Considérons $\mathbb{A}^2$ et $\mathbb{K}[x, y]$. Un polynôme $f \in \mathbb{K}[x, y]$ est irréductible ssi l'idéal engendré par ce polynôme (c'est à dire (f)) est premier ssi la courbe qui détermine $f(x, y) = 0$ (c'est à dire, $Z(f)$) est irréductible dans le sens général, en coincident avec ce qu'on avait défini.*
2. *Soit $\mathfrak{m} \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un idéal maximal. On notte que pour $\mathfrak{p}$ un idéal primer on a $\mathfrak{p} = \sqrt{p}$, c'est à dire, tout idéal primer est radical. Alors $\mathfrak{m}$ correspond à un sous ensemble fermé irréductible minimal, donc correspond à un point $(a_1, \ldots, a_n)$. Par consequence du Théorème des Zéros de Hilbert, tout idéal maximal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est de la forme $(x - a_1, \ldots, x - a_n)$.*
3. *Dans le cas de $\mathbb{K}$ un corps que n'est pas algébriquement clos (soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), le Théorème des Zéros de Hilbert n'est pas vrai. Un contraexemple est $\mathfrak{a} = (x^2 + 1)$ qui n'est pas le total mais $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$.*

Remarque 2.2.6. *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il existe un polynôme irréductible $f \in \mathbb{K}[x, y]$ tal que $Z(f) \subset \mathbb{A}^2$ est réductible.*

Démonstration. Posons $f(x, y) = x^2 + 1$, on a que $Z(f) = \emptyset$ n'est pas irréductible. □

Définition 2.2.7. *Soit Y un sous ensemble algébrique de $\mathbb{A}^n$. L'anneau quotient :*

$$A(Y) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \Big/ I(Y) \tag{2.7}$$

s'appelle anneau de coordonnées *de Y. Les éléments de $A(Y)$ s'appellent parfois les* fonctions régulières *sur Y (car elles sont la restriction d'une fonction polynomiale sur Y).*

Remarque 2.2.8. *On notte que pour $Y \subset \mathbb{A}^n$ un sous ensembla algébrique, l'anneau $A(Y)$ est integre. De plus, $A(Y)$ est associé à une (et seulement une) $\mathbb{K}$ algèbre de dimension finie sans éléments nilpotents.*

Démonstration. EXERCICE. □

Exemple 2.2.9. *Voyons quelques cas d'anneaux de coordonnées.*

1. *Soit $Y = \{p\}$ un point, $p = (a_1, \ldots, a_n)$, alors $A(Y) \cong \mathbb{K}$.*
2. *Soit $Y = \mathbb{A}^n$, alors $A(Y) \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.*
3. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^2$ défini par $y = x^2$, alors $A(Y) \cong \mathbb{K}[x]$.*
4. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^2$ défini par $yx = 1$, alors $A(Y) \cong \mathbb{K}[x, x^{-1}]$.*

Démonstration. 1. On a que $I(\{p\}) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, on quociente par un idéal maximal, et de plus celui ci identifie chaque variable avec un élément de $\mathbb{K}$. On a que $A(Y) \cong \mathbb{K}$.

2. On a que $I(\mathbb{A}^n) = (0)$, c'est à dire, faire le quocient c'est rien faire, on a que $A(Y) \cong \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.
3. On a que quocienter par $I(y-x^2)$ idéntifie (car $y-x^2$ est irréductible) y avec x^2, de manière que $A(Y) \cong \mathbb{K}[x, x^2] = \mathbb{K}[x]$.
4. On a que quocienter par $I(yx - 1)$ idéntifie (car $yx - 1$ est irréductible) y avec x^{-1}, de manière que $A(Y) \cong \mathbb{K}[x, x^{-1}]$.

□

Définition 2.2.10. *Un espace topologique X est dit* noethérien *si X vérifie la condition de chaîne descendente pour les fermés : toute suite $Y_0 \supset \cdots \supset Y_n \supset \cdots$ de fermés de X devient stationnaire.*

Équivalentment X peut vérifier la condition de chaîne ascendante.

Proposition 2.2.11. *L'espace affine $\mathbb{A}^n$ est noethérien pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.*

Démonstration. EXERCICE. □

Proposition 2.2.12. *Soit X un espace topologique noethérien. Alors tout sous ensemble $Y \subset X$ fermé non vide peut être representeé sous la forme $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ où Y_i, $i = 1, \ldots, r$ sont des fermés irréductibles. De plus, si $Y_i \not\subset Y_j$ pour $i \neq j$, une telle décomposition est unique.*

Démonstration. On considère les sous ensembles fermés de X qui n'admettent pas une décomposition de ce type, et supposons que cette collection de sous ensembles est non vide. Comme X est noethérien, alors cette collection a un (pas "le", seulement "un") élément minimal N par inclusion. On a alors deux possibilités, soit N est irréductible et on a une contradiction, soit il n'est pas irréductible, et alors il contient deux fermés $N_1 \subsetneq N$, $N_2 \subsetneq N$ tal que $N = N_1 \cup N_2$, en particulier N n'est pas minimal, contradiction.

Supposons que on a deux décompositions de $Y \subset X$:

$$Y_1 \cup \cdots \cup Y_r = Y = Y'_1 \cup \cdots \cup Y'_s \tag{2.8}$$

avec $Y_i \not\subset Y_j$ pour $i \neq j$ et $Y'_i \not\subset Y'_j$ pour $i \neq j$. Considérons les intersections $Y'_1 \cap Y_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Puisque Y'_1 est irréductible, on obtient (à changement des indices près) que $Y'_1 \cap Y_1 = Y'_1$ et alors $Y'_1 \subset Y_1$. À son tour, $Y_1 \subset Y'_i$ pour un certain $i = 1, \ldots, s$, mais $Y'_i \not\subset Y'_j$ pour $i \neq j$ donc $Y_1 = Y'_1$.

Cet argument peut être continué pour $Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$ et $Y'_2 \cup \cdots \cup Y'_s$, en obtenant l'unicité. □

Définition 2.2.13. *Soit X un espace topologique noethérien et pour $Y \subset X$ un ensemble fermé non vide, soit $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ où Y_i, $i = 1, \ldots, r$ sont des fermés irréductibles. A Y_i, $i = 1, \ldots, r$ on les appelle* composantes irréductibles *de Y.*

Corollaire 2.2.14. *Tout sous ensemble algébrique de $\mathbb{A}^n$ peut être représenté comme réunion finie de variétés algébriques affines. De plus, si on suppose qu'aucune variété algébrique affine de cette décomposition n'est pas contenue dans une autre variété algébrique affine de la même décomposition, une telle décomposition est unique.*

Démonstration. Est une conséquence immediate de la Proposition 2.2.12. □

Définition 2.2.15. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ un sous ensemble algébrique, et $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ pour Y_i, $i = 1, \ldots, r$ la décomposition en variétés algébriques affines. On appelle a ces Y_i les* composantes irréductibles *de Y.*

Définition 2.2.16. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété algébrique affine. La* dimension $\dim(Y)$ *de Y est la borne supérieure des nombres entiers positifs n tal que il existe une suite $Y_0 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_n$ de fermés irréductibles de Y.*

Exemple 2.2.17. *La dimension de $\mathbb{A}^1$ est 1. Ceci est une consequence de que les fermés de $\mathbb{A}^1$ sont $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ et les collections finies de points, et alors les fermés irréductibles sont le total et les points. Toute suite est donc de la forme $\mathbb{A}^1 \supsetneq \{p\}$ pour $p \in \mathbb{A}^1$, et alors $\dim(\mathbb{A}^1) = 1$.*

Mais on peut définir la **dimension** d'un espace topologique X général.

Définition 2.2.18. *Soit X un espace topologique. La* dimension $\dim(X)$ *de X est la borne supérieure des nombres entiers positifs n tal que il existe une suite $Y_0 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_n$ de sous ensembles fermés irréductibles de X.*

Définition 2.2.19. *Soit A un anneau (commutatif avec unité) et $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier. L'*hauteur $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ *de $\mathfrak{p}$ est la borne supérieure des entiers positifs n tal que il existe une suite $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ d'idéaux premiers de A.*

La dimension (de Krull) $\dim_k(A)$ *de A est la borne supérieure des hauteurs des idéaux premiers de A.*

Proposition 2.2.20. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété algébrique. Alors $\dim(Y)$ la dimension de Y comme variété algébrique affine (Définition 2.2.16) est égale à $\dim_k(A(Y))$ la dimension de Krull (Définition 2.2.19) de $A(Y)$ l'anneau de coordonnées de Y.*

Démonstration. EXERCICE. □

On rapelle que pour B anneau commutatif et $A \subset B$ un sous anneau, un élément $b \in B$ est **intègre** où **entier** sur A quand il existe $a_i \in A$, $i = 0, \ldots, n-1$ tal que $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$.

Proposition 2.2.21. *Soit B une $\mathbb{K}$ algèbre intègre de type fini. Alors :*

1. *La dimension de Krull de B est égale au degré de trascendence (sur $\mathbb{K}$) du corps de fractions de B.*
2. *Soit $\mathfrak{p} \subset B$ un idéal premier. Alors :*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim_k(B/\mathfrak{p}) = \dim_k(B). \tag{2.9}$$

Démonstration. On peut la trouver à [5]. □

Corollaire 2.2.22. *La dimension de l'espace affine $\mathbb{A}^n$ est $\dim(\mathbb{A}^n) = n$.*

Démonstration. On a que $A(\mathbb{A}^n) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau de coordonnées de $\mathbb{A}^n$. Son corps de fractions est $K(x_1, \ldots, x_n)$, qui a degré de trascendence n. □

Définition 2.2.23. *Une* variété quasi affine *dans* $\mathbb{A}^n$ *est un ouvert dans une variété affine de* $\mathbb{A}^n$.

Proposition 2.2.24. *Soit* Y *une variété quasi affine dans* $\mathbb{A}^n$*, alors* $\dim(Y) = \dim(\overline{Y})$

Démonstration. EXERCICE. □

On rapelle que pour A anneau on dit que $S \subset A$ est un **système multiplicatif** quand $1 \in S$ et si $a, b \in S$ alors $ab \in S$. La **localisation de** A **en** S est :

$$A_S = \{(a,s) = \tfrac{a}{s} | a \in A, s \in S\} \Big/ (a,s) \sim (a', s') \iff \exists t \in S : (as' - a's)t = 0 \tag{2.10}$$

Le **Lemme de Zariski** est valide dans le cas d'un cos général $\mathbb{K}$, et on l'ennonce accordement, mais ceci on le démonstre seulement pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos.

Lemme 2.2.25 (de Zariski)**.** *Soit* $\mathbb{K}$ *un cos pas nécéssairement clos. Soit* A *une* $\mathbb{K}$ *algèbre de type fini engendré par* $y_1, \dots, y_n$ *qui est aussi un corps. Alors* $y_1, \dots, y_n$ *sont algébriques sur* $\mathbb{K}$.

Démonstration. On le fait par récurence. Pour le cas $n = 1$ on pose $y = y_1$, où s'il c'est trascendent sur $\mathbb{K}$ on a que $A \cong \mathbb{K}[x]$, mais ceci n'est pas un corps, et alors on doit avoir y algèbrique.

Supposons le résultat vrai pour $n-1$, faisons le cas n. On a $A = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$ la $\mathbb{K}$ algèbre de type fini engendrée par $y_1, \dots, y_n \in A$. Comme A est un corps, on a $\mathbb{K}(y_1) \subset A$, et de plus $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_n] = \mathbb{K}(y_1)[y_2, \dots, y_n]$. Par l'hypothèse de récurrence, on a que $y_2, \dots, y_n$ sont algèbriques sur $\mathbb{K}(y_1)$. Il reste à montrer que y_1 est algébrique sur $\mathbb{K}$ (pour la transitivité des extensions algébriques).

On a que pour chaque y_i, $i = 2, \dots, n$ est une racine d'un polynôme (à une variable) à coefficients dans $\mathbb{K}[y_1]$ (clairement c'est le cas pour $\mathbb{K}(y_1)$, on multiplie par le dénominateur commun a de tous les termes de tous ces polynômes), mais le coefficient du terme de degré majeur n'est pas nécéssairement l'unité. C'est claire que $y_2, \dots, y_n$ sont entiers sur $\mathbb{K}[y_1]_S$ (qui est la localisation de $\mathbb{K}[y_1]$ en S) pour le système multiplicatif $S = \{1, a, a^2, \dots\}$.

Comme $y_1 \in \mathbb{K}[y_1]_S$, on a en faite que $y_1, \dots, y_n$ sont entiers sur $\mathbb{K}[y_1]_S$. Donc $A = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$ est entière sur $\mathbb{K}[y_1]_S$ (pour la transitivité des extensions entières). Ceci implique que $\mathbb{K}[y_1]_S$ est un corps : soit $0 \neq b \in \mathbb{K}[y_1]_S$, on veut voir que $1/b \in \mathbb{K}[y_1]_S$. On a que $1/b \in A$, et il est entier sur $\mathbb{K}[y_1]_S$. Il existe donc un polynôme monique $R(x) \in \mathbb{K}[y_1]_S[x]$ avec $R(1/b) = 0$, soit :

$$R(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_0, \quad R\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)^d + c_{d-1}\left(\frac{1}{b}\right)^{d-1} + \dots + c_0 = 0, \tag{2.11}$$

et en multipliant par b^{d-1} on obtient :

$$\frac{1}{b} + c_{d-1} + \dots + c_0 b^{d-1} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{b} = -c_{d-1} - \dots - c_0 b^{d-1} \in \mathbb{K}[y_1]_S, \tag{2.12}$$

et on peut invertir $b \in \mathbb{K}[y_1]_S$.

Supposons que y_1 est trascendent sur $\mathbb{K}$, on veut trouver une contradiction. La trascendence de y_1 nous donne que $\mathbb{K}[y_1]_S \cong \mathbb{K}[x]_{\tilde{S}}$ pour $\tilde{S} = \{1, a(x), a^2(x), \dots\}$ un système multiplicatif à $\mathbb{K}[x]$. Mais ceci est une contradiction, car $\mathbb{K}[x]_{\tilde{S}}$ n'est pas un corps. Voyons ceci : supposons que c'est un corps, alors on cherche l'invers de $1 + a(x)$:

$$1 = (1 + a(x))\xi \quad \text{pour certain} \quad \xi \in \mathbb{K}[x]_{\tilde{S}}. \tag{2.13}$$

Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on peut trouver une décomposition en monomes $1 + a(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r)$, où on pose $\deg(a) = r$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Alors :

$$1 = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r)\xi \Longrightarrow 1 = \alpha_1 \cdots \alpha_n \xi \Longrightarrow \xi \in \mathbb{K}, \tag{2.14}$$

qui est une contradiction car $1 + a(x) \notin \mathbb{K}$. □

On est maintenant en conditions de finir la démonstration du Théorème des Zéros de Hilbert.

Proposition 2.2.26. *Soit* $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ *un idéal tal que* $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$. *Alors* $\mathfrak{a} = (1)$.

Démonstration. On veut voir que $\mathfrak{a} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Supposons que no, en particulier on peut supposer que $\mathfrak{a}$ est maximal : s'il n'est pas maximal, soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ maximal, alors $\emptyset = Z(\mathfrak{a}) \supset Z(\mathfrak{m})$ (on peut augmenter les éléments de $\mathfrak{a}$ et on n'ajoute pas des zéros). Alors $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a}$ est un corps, posons $y_i = [x_i]$ pour $i = 1, \dots, n$, et il correspond à une $\mathbb{K}$ algèbre de type fini. Par le Lemme de Zariski on a que y_i, $i = 1, \dots, n$ sont algébriques dans $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos, c'est à dire $y_i \in \mathbb{K}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{a} = \mathbb{K}$. Mais ceci est une contradiction, car si $f \in \mathfrak{a}$, alors $f(y_1, \dots, y_n) = 0$ et $Z(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$. $\square$

2.3 Variétés projectives

On considère $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un **anneau gradué**, car :

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d \tag{2.15}$$

où S_d sont les combinaisons linéaires des monomes de degré d.

Définition 2.3.1. *Un anneau S est dit* graudé *s'il a la forme :*

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d \tag{2.16}$$

où S_d sont des groupes abéliens tal que $S_d S_l = S_{d+l}$ pour tous $d, l \geq 0$.

Si S est un anneau gradué, un idéal $\mathfrak{a} \subset S$ est dit homogène *si :*

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d). \tag{2.17}$$

Les éléments de S_d pour chaque $d \geq 0$ s'appellent homogènes de degré d.

Proposition 2.3.2. *Soit S un anneau homogène.*

1. *Un idéal de S est homogène ssi il peut être engendré par des éléments homogènes.*
2. *La somme, le produit et l'intersection de deux idéaux homogènes résultent en un idéal homogène. De plus, le radical d'un idéal homogène est homogène.*
3. *Pour vérifier qu'un idéal homogène $\mathfrak{a}$ est premier, il suffit de vérifier que :*

$$\left.\begin{array}{l} f, g \text{ homogènes} \\ fg \in \mathfrak{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathfrak{a} \text{ où } g \in \mathfrak{a}. \tag{2.18}$$

Démonstration. EXERCICE. $\square$

Comme dans le cas affin, pour $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogène on peut associer $Z(f) \subset \mathbb{P}^n$ le lieu des zéros de f. En fait, si on a $T \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ une collection de polynômes homogènes, on peut associer $Z(T) \subset \mathbb{P}^n$ son lieu des zéros, et puis que $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ est noethérien, il existe un sous ensemble fini $T' \subset T$ tal que $Z(T') = Z(T)$.

Définition 2.3.3. *Soit* $\mathfrak{a} = \oplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d) \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ *un idéal homogène, on peut associer* $Z(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n$ *le* lieu des zéros communs de tous les plynômes homogènes *de* $\mathfrak{a}$.

Définition 2.3.4. *Un sous ensemble $Y \subset \mathbb{P}^n$ est dit* algébrique (projectif) *si $Y = Z(T)$ pour une certaine collection $T \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ de polynômes homogènes.*

Proposition 2.3.5. *Les complémentaires de sous ensembles algébriques dans $\mathbb{P}^n$ donnent les ouverts d'une topologie sur $\mathbb{P}^n$.*

Démonstration. EXERCICE. $\square$

Définition 2.3.6. *La topologie sur $\mathbb{P}^n$ où les fermés sont définis par les sous ensembles algébriques de $\mathbb{P}^n$ s'appelle la* topologie de Zariski de $\mathbb{P}^n$.

Définition 2.3.7. *Un sous ensemble algébrique $Y \subset \mathbb{P}^n$ est une* variété projective *si Y est irréductible (vu comme sous espace de $\mathbb{P}^n$ avec la topologie de Zariski). Une* variété quasi projective *dans $\mathbb{P}^n$ est un ouvert d'une variété projective dans $\mathbb{P}^n$.*

Définition 2.3.8. *Si $Y \subset \mathbb{P}^n$ est un sous ensemble algébrique, on associe $I(Y) \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ l'*idéal homogène de Y*, qui est engendré par tous les polynômes homogènes qui s'annullent sur Y. On peut aussi associer :*

$$S(Y) = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \Big/ I(Y) \tag{2.19}$$

*l'*anneau des coordonées homogène *(l'anneau est homogène, pas les coordonnées) de Y.*

Proposition 2.3.9. *Considérons les cartes affines $\mathbb{A}^n_i \subset \mathbb{P}^n$ pour $i = 0, \ldots, n$ définies comme :*

$$\mathbb{A}^n_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n | x_i \neq 0\}. \tag{2.20}$$

Pour chaque $i = 0, \ldots, n$ on a :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i & : & \mathbb{A}^n_i & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & & (x_0 : \cdots : x_n) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{array} \tag{2.21}$$

alors :

1. *φ_i est un homéomorphisme.*
2. *Comparer la topologie de Zariski de $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{P}^n$.*

Démonstration. EXERCICE. $\square$

On peut considérer une version projective du Théorème des Zéros de Hilbert.

Théorème 2.3.10. *Soit $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un idéal homogène, soit $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène de degré positif. Si $Z(f) \subset Z(\mathfrak{a})$ alors il existe un nombre entier positif $r \in \mathbb{N}^+$ tal que $f^r \in \mathfrak{a}$.*

Démonstration. EXERCICE. $\square$

Remarque 2.3.11. *Est ce qu'il y a une rélation entre les ensembles algébriques affines et les idéaux radicaux affines ? Il se passe quoi dans le cas projectif ?*

On notte qu'il y a des diférences avec le cas affine. En particulier, ici on a presque une bijection, seulement il faut bien choisir où va $\emptyset$. Si on associe $\emptyset \leftrightsquigarrow \mathbb{P}^n$ (avec le total), c'est une bijection.

EXERCICE.

Chapitre 3

Applications régulières et applications rationelles

3.1 Morphismes

Définition 3.1.1. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété quasi affine et $p \in Y$. Une fonction $f : Y \to \mathbb{K}$ est dite* régulière en *p s'il existe un voisinage ouvert $U \ni p$ et deux polynômes $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que :*

1. *h ne s'anulle pas sur U,*
2. *$f = g/h$ sur U.*

On dit que f est régulière *si f est régulière en tout point $p \in Y$.*

Voyons un résultat qui est très utile et nous permet voir certaines propiétés localement.

Lemme 3.1.2. *Soit X un espace topologique, $Z \subset X$ et $X = \cup_i U_i$ un recouvrement ouvert. Alors Z est fermé ssi $Z \cap U_i$ est fermé dans U_i pour tout i.*

Démonstration. $\Rightarrow$) C'est clair par définition.
$\Leftarrow$) Suposons que Z n'est pas fermé. Alors $Z \subsetneq \overline{Z}$, et il existe $x \in \overline{Z}$ tal que $x \notin Z$ avec $x \in U_i$ pour un certain i, en particulier $x \notin Z \cap U_i$. Par hypothèse $Z \cap U_i$ est fermé dans U_i et alors $Z \cap U_i = V \cap U_i$ pour un certain fermé V de X. Alors $Z \subset V \cup (X \setminus U_i)$ (la partie de Z hors U_i n'est pas affectée, et la de dedans on l'ajoute en l'union avec V) un fermé, donc $\overline{Z} \subset V \cup (X \setminus U_i)$, en particulier $x \in (V \cup (X \setminus U_i)) \cap U_i = V \cap U_i = Z \cap U_i$, contradiction. $\square$

Proposition 3.1.3. *Toute fonction régulière $f : Y \to \mathbb{K}$ est continue (on identifie $\mathbb{K} = \mathbb{A}^1$ et bien sur la topologie de Zariski).*

Démonstration. Il est suffisant de vérifier que pour tout $a \in \mathbb{K}$ le sous ensemble $f^{-1}(a) \subset Y$est fermé. De plus, il suffit de vérifier l'enoncé localement : posons $Y = \cup_i U_i$ un recouvrement ouvert de Y. Si $f^{-1}(a) \cap U_i$ est fermé dans U_i pour tout i, alors $f^{-1}(a)$ est fermé dans Y.

On sait que pour tout $p \in Y$ il existe un ouvert $U \ni p$ et deux polynômes $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tals que :

1. h ne s'anulle pas sur U,
2. $f = g/h$ sur U.

On s'intèresse à $f^{-1}(a) \cap U$, on veut que ceci soit fermé dans U (on notte que ceci est sufisant car on peut trouver $U_i \subset U$ pour notre recouvrement) :

$$f^{-1}(a) \cap U = \{x \in U | g(x)/h(x) = a\} = \{x \in U | g(x) - ah(x) = 0\} = U \cap Z(g(x) - ah(x)) \quad (3.1)$$

un fermé de la topologie de Zariski par définition. □

Définition 3.1.4. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une variété quasi projective avec $p \in Y$. Une fonction $f : Y \to \mathbb{K}$ est dite* régulière en p *s'il existe un voisinage ouvert $U \ni p$ et deux polynomes homogènes de même degré $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que :*

1. *h ne s'anulle pas sur U,*
2. *$f = g/h$ sur U.*

On dit que f est régulière *si f est régulière en tout point $p \in Y$.*

Proposition 3.1.5. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une variété quasi projective et $f : Y \to \mathbb{K}$ une fonction régulière. Alors f est continue.*

Démonstration. EXERCICE. □

Corollaire 3.1.6. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une variété quasi projective et $f : Y \to \mathbb{K}$, $f' : Y \to \mathbb{K}$ fonctions régulières telles que $f = f'$ sur un ouvert non vide de Y. Alors $f = f'$ sur Y.*

Démonstration. Le sous ensemble sur lequel $f = f'$ est fermé (car f et f' sont régulières donc continues) et dense (par la Proposition 2.1.11) dans Y. Donc $f = f'$ sur Y tout entier. □

On parlerait maintenant des **morphismes entre variétés**. En fait, ici nous travaillons sur la **catégorie des $\mathbb{K}$ variétés** (le cas quasi affines et quasi projectives). Nos objets sont dites variétés (que d'ici en avant si on ne di pas le contraire sont des variétés quasi projectives, le cas plus genéral) et on suivi avec la définition de ces morphismes.

Définition 3.1.7. *Soit $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ deux variétés (quasi projectives, le cas plus général). Une application continue $\varphi : X \to Y$ est un* morphisme de variétés *si pour tout ouvert $V \subset Y$ et toute fonction régulière $f : V \to \mathbb{K}$ la fonction $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to \mathbb{K}$ est régulière sur $\varphi^{-1}(V)$.*

S'il existe un morphisme réciproque $\psi : Y \to X$ tal que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y$, on dit que φ est un isomorphisme de variétés.

Proposition 3.1.8. *Soit $X, Y, W \subset \mathbb{P}^n$ des variétés, $\varphi : X \to Y$ et $\phi : Y \to W$ deux morphismes de variétés. Alors $\phi \circ \varphi : X \to W$ est un morphisme de variétés.*

Démonstration. EXERCICE. □

On note que si $\varphi : X \to Y$ est un isomorphisme de variétés, en particulier il est un homeomorphisme.

Exemple 3.1.9. *Considérons l'application :*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & & t & \longmapsto & (t^2, t^3) \end{array} \quad (3.2)$$

Alors φ est un morphisme qui établie un homéomorphisme entre $\mathbb{A}^1$ et la courbe $C \subset \mathbb{A}^2$ définie par $y^2 = x^3$, mais φ n'est pas un isomorphisme. EXERCICE.

Définition 3.1.10. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une variété. On défini $\mathcal{O}(Y)$ l'*anneau des fonctions régulières *sur Y.*

*Pour chaque $p \in Y$ on note $\mathcal{O}_{p,Y} = \mathcal{O}_p$ l'*anneau local de Y en p*, qu'on défini comme l'anneau des germes des fonctions régulières en p : les éléments de $\mathcal{O}_{p,Y}$ sont les classes d'équivalence (U, f) pour $p \in U$ un voisinage ouvert et f une fonction régulière en U, où on dit que $(U, f) \sim (U', f')$ ssi $f = f'$ sur $U \cap U'$.*

Proposition 3.1.11. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une variété et $p \in Y$. L'anneau $\mathcal{O}_{p,Y}$ est bien défini, c'est à dire, $\sim$ est une rélation d'équivalence.*

Démonstration. EXERCICE. □

Remarque 3.1.12. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une variété, $p \in Y$. Alors $\mathcal{O}_p$ est local, c'est à dire, il a un seul ideál maximal $\mathfrak{m}$. Celui ci est formé par les germes des fonctions régulières qui s'annullent en p.*

Démonstration. Considérons $\mathfrak{m}$ l'idéal formé par les germes des fonctions régulières qui s'annullent en p, et soit (U, f) un germe non nul (c'est à dire, $f(p) \neq 0$). Considérons $U \cap V$ où $V = \{q \in Y | f(q) \neq 0\} = Y \setminus Z(f)$, un ouvert. Alors $U \cap V$ est un ouvert et on peut considérer $1/f$ une fonction régulière. Donc, tout germe qui n'appartient pas à $\mathfrak{m}$ est invertible, alors $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}$ est un corps et donc $\mathfrak{m}$ est maximal. □

De plus, pour chaque $p \in Y$ une variété, en regardant le valeur des germes en p on a une identification naturelle $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m} = \mathbb{K}$.

Définition 3.1.13. *Le* corps de fractions *$K(Y)$ de Y une variété à comme éléments les classes d'équivalence (U, f) où U est un ouvert non vide de Y et f est une fonction régulière sur U, avec l'équivalence $(U, f) \sim (U', f')$ ssi $f = f'$ sur $U \cap U'$. Ces éléments s'appellent les* fonctions rationelles *sur Y.*

On notte que la Proposition 3.1.11 montre que ceci est effectivement une rélation d'équivalence.

Proposition 3.1.14. *Le corps $K(Y)$ d'une variété Y est muni d'une addition et multiplication naturelles qui li donnent une structure de corps.*

Démonstration. EXERCICE. □

Proposition 3.1.15. *Soit Y une variété et $p \in Y$. Les applications qui suivent son injectives :*

$$\mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_{p,Y} \longrightarrow K(Y) \tag{3.3}$$

et on peut donc considérer $\mathcal{O}(Y)$ et $\mathcal{O}_{p,Y}$ comme sous anneaux de $K(Y)$.

Démonstration. EXERCICE. □

On notte que dans le cas d'une variété irréductible $C \subset \mathbb{A}^2$, les corps $K(C)$ de la Définition 1.2.4 et le correspondant à la Définition 3.1.13 sont naturellement identifiés.

Maintenant on veut montrer que pour travailler avec des variétés Y et des points $p \in Y$, les objets $\mathcal{O}(Y)$, $\mathcal{O}_{p,Y}$ et $K(Y)$ sont très importants, en particulier is sont des **invariants à isomorphisme près**. De plus, si Y est affine on peut considérer $A(Y)$ et si Y est projective on peut considérer $S(Y)$.

Remarque 3.1.16. *Quand on a B un anneau et $\mathfrak{p}$ un idéal premier, l'ensemble $B \setminus \mathfrak{p}$ est un système multiplicatif. Nous noterons $B_{\mathfrak{p}} = (B \setminus \mathfrak{p})^{-1}B = B_{(B \setminus \mathfrak{p})}$ la localisation en ce système.*

Lemme 3.1.17. *Soit B un anneau entier. Alors $B = \bigcap_{\mathfrak{m}\ maximal} B_{\mathfrak{m}}$.*

Démonstration. $\subseteq$) On a $B \subset \bigcap_{\mathfrak{m}\text{ maximal}} B_{\mathfrak{m}}$ car on peut toujours considérer $b/1$ pour $b \in B$.

$\supseteq$) Suppososn qu'il existe $a \in \bigcap_{\mathfrak{m}\text{ maximal}} B_{\mathfrak{m}}$ tal que $a \notin B$. Considérons l'idéal $\mathfrak{a} \subset B$:

$$\mathfrak{a} = \{b \in B | ab \in B\}. \tag{3.4}$$

C'est un idéal propre car $1 \notin \mathfrak{a}$, donc il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Par hypothèse on a $a \in B_{\mathfrak{m}}$, c'est à dire, il existe $c \in B$ et $s \in B \setminus \mathfrak{m}$ (en particulier $s \notin \mathfrak{a}$) tal que $a = [c/s]$, mais ceci est une contradiction : $as = c \in B$ et alors $s \in \mathfrak{a}$. □

Théorème 3.1.18. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété affine. Alors :*

1. *on a $A(Y) \cong \mathcal{O}(Y)$,*
2. *pout tout point $p \in Y$, considérons l'idéal $\mathfrak{m}_p \subset A(Y)$ formé par toutes les fonctions qui s'annullent en p. On a une bijection :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \{\textit{idéaux maximals de } A(Y)\} \\ p & \longmapsto & \mathfrak{m}_p \end{array} \tag{3.5}$$

3. *pout tout point $p \in Y$ on a $A(Y)_{\mathfrak{m}_p} \cong \mathcal{O}_p$ et $\dim_k(\mathcal{O}_p) = \dim(A(Y))$.*
4. *le corps $K(Y)$ est le corps de fractions de $A(Y)$.*

Démonstration.

1. Prenons la restriction sur Y, qui nous donne un morphisme d'anneau $K[x_1, \ldots, x_n] \to \mathcal{O}(Y)$. Le noyau de ce morphisme est $I(Y)$ et donc on a une application injective $\alpha : A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$. Laissons ça ici, on retournera.
2. Par l'Exemple 2.2.5 on deduït qu'on a une bijection entre les points de Y et les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ qui contiennent $I(Y)$, et alors on a une bijection entre les points de Y et les idéaux maximaux de $A(Y)$.
3. Pour tout point $p \in Y$ les éléments de $A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$ sont de la forme $[f]/[s]$ avec $[f] \in A(Y)$ et $[s] \in A(Y) \setminus \mathfrak{m}_p$ avec des réprésentants $f, s \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. De plus, comme $s(p) \neq 0$, on peut considérer $U \subset Y$ l'ouvert où s s'annulle pas. Ici f/s est une fonction régulière et donc est en $\mathcal{O}_p$. On a une application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & A(Y)_{\mathfrak{m}_p} & \longrightarrow & \mathcal{O}_p \\ & & [f]/[s] & \longmapsto & (U, f/s) \end{array} \tag{3.6}$$

qui est bien définie, injective, surjective et est un morphisme d'anneau. EXERCICE. On obtient l'isomorphisme.

Pour voir l'égalité de dimensions, on commence par notter que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}_p) = \dim_k(A(Y)_{\mathfrak{m}_p})$ car $A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$ est local et l'idéal maximal de $\mathcal{O}_p$ correspond à $\mathfrak{m}_p$ (et en fait l'application naturelle d'envoyer chaque idéal premier $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_p$ à l'idéal premier formé par lui même et multiplication par les invertibles $\tilde{\mathfrak{p}} \subset A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$ est une bijection). De plus en considérant le valeur de notre élément de $A(Y)$ sur p, on voi que $A(Y)/\mathfrak{m}_p = \mathbb{K}$. Comme $\dim_k(\mathbb{K}) = 0$, on a :

$$\dim_k(A(Y)) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}_p) + \dim_k(A(Y)/\mathfrak{m}_p) = \dim_k(A(Y)_{\mathfrak{m}_p}) = \dim_k(\mathcal{O}_p). \tag{3.7}$$

4. Pour tout point $p \in Y$ on peut écrire :

$$A(Y) \subset \mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}_p \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_p} \subset K(Y) \tag{3.8}$$

et en particulier le corps de fractions de $A(Y)$ est isomorphe au corps de fractions de $\mathcal{O}_p$ (ils ont la même dimension et on a une inclusion naturelle), c'est à dire à $K(Y)$. (DOUTE ! POURQUOI ?)

1. On retourne, maintenant on a :

$$A(Y) \subset \mathcal{O}(Y) \subset \bigcap_{\mathfrak{m}_p \text{ maximal}} A(Y)_{\mathfrak{m}_p} \subset K(Y) \tag{3.9}$$

avec $A(Y)$ entier. On pose $B = A(Y)$ dans le Lemme 3.1.17 et on obtient $A(Y) = \mathcal{O}(Y)$. □

Proposition 3.1.19. *Considérons les cartes affines $\mathbb{A}_i^n \subset \mathbb{P}^n$ pour $i = 0, \ldots, n$. Alors :*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i & : & \mathbb{A}_i^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & & (x_0 : \cdots : x_n) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{array} \tag{3.10}$$

est un isomorphisme de variétés.

Démonstration. EXERCICE. □

Corollaire 3.1.20. *Toute variété quasi projective admet un récouvrement ouvert par des variétés isomorphes à des variétés quasi affines.*

Démonstration. Pour un récouvrement ouvert d'une variété projective, on peut faire les intersections de ces ouverts avec les cartes affines standards. Par la Proposition 3.1.19, ces intersections son des variétés isomorphes à des variétés quasi affines. □

En particulier, si on s'intérèsse à des propiétés locales, on peut donc travailler avec une carte affine qui contient ce point.

Théorème 3.1.21. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété quasi projective. Alors :*

1. *on a $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{K}$,*
2. *pout tout point $p \in Y$, considérons l'idéal $\mathfrak{m}_p \subset S(Y)$ formé par toutes les éléments homogènes qui s'annullent en p. Alors $\mathcal{O}(Y) = S(Y)_{(\mathfrak{m}_p)}$, où le système multiplicatif sont tous les éléments homogènes dans $S(Y) \setminus \mathfrak{m}_p$, et les parenthèses indiquent qu'on considère le sous anneau de la localisation formé apr les éléments de degré nul ($\deg(f/g) = \deg(f) - \deg(g)$).*
3. *on a $K(Y) = S(Y)_{(0)}$, on localise dans l'idéal de 0.*

Démonstration. Peut être trouvé à [6]. □

Lemme 3.1.22. *Soit X une variété et $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété affine. Soit $\psi : X \to Y$ une application. Alors ψ est un morphisme ssi pout tout $i = 1, \ldots, n$ la fonction $x_i \circ \psi$ est régulière sur X.*

Démonstration. $\Rightarrow$) C'est vrai par la définition de morphisme.

$\Leftarrow$) On sait que pour tout polynôme $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ la fonction $f \circ \psi$ est régulière sur X. Voyons que ψ est continue : les fermés de Y sont des lieux de zéros de systèmes de polynômes, et les fonctions régulières sont continues :

$$X \supset \psi^{-1}(V) \longrightarrow V \subset Y \subset \mathbb{A}^n$$

où V est un fermé défini par $f_1, \ldots, f_k$ polynômes. Alors pour $x \in \psi^{-1}(V)$ on a $\psi(x) \in V$ et $f_i \circ \psi(x) = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$. C'est à dire, $\psi^{-1}(V)$ est le lieu de zéros de fonctions régulières, qui sont continues, et alors est un fermé. De plus, comme localement les fonctions régulières sur Y s'écrivent comme rapport de deux polynômes, ψ les transforme en fonctions régulières et est un morphisme. □

Proposition 3.1.23. *Soit X une variété quasi projective et $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété affine. Alors il y a une bijection naturelle :*

$$\begin{array}{rcl} \alpha \; : \; \mathrm{Hom}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A(Y),\mathcal{O}(X)) \\ \varphi & \longmapsto & \alpha(\varphi) \; : \; \begin{array}{rcl} A(Y) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X) \\ f & \longmapsto & f\circ\varphi \end{array} \end{array} \tag{3.11}$$

entre les morphismes de variétés est les morphismes de $\mathbb{K}$ algèbres.

Démonstration. Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme. Il définit un morphisme de $\mathbb{K}$ algèbres $\alpha(\varphi)$: $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Soit $h : A(Y) \to \mathcal{O}(X)$ un morphisme de K algèbres, on veut construire un morphisme $\psi : X \to Y$.

On pose $Y \subset \mathbb{A}^n$ avec les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. Alors, on peut considérer $x_1 \rightsquigarrow [x_i] \in A(Y)$ pour $i = 1, \ldots, n$. On pose $\xi_i = h([x_i])$ pour $i = 1, \ldots, n$, et on obtient n fonctions régulières sur X. On pose :

$$\psi(p) = (\xi_1(p), \ldots, \xi_n(p)) \quad \text{pour tout} \quad p \in X, \tag{3.12}$$

c'est à dire, on à la construction :

$$\begin{array}{rcl} \beta \; : \; \mathrm{Hom}(A(Y),\mathcal{O}(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,Y) \\ h & \longmapsto & \psi = \beta(h) \; : \; \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & Y \\ p & \longmapsto & (h([x_1])(p), \ldots, h([x_n])(p)) \end{array} \end{array} \tag{3.13}$$

On affirme que $\psi(X) \subset Y$. Soit $p \in X$, on veut vérifier que $\psi(p) \in Y$, c'est à dire, $f(\psi(p)) = 0$ pout tout $f \in I(Y)$ (car Y est fermé et $Z(I(Y)) = \overline{Y} = Y$). On a :

$$f(\psi(p)) = f(\xi_1(p), \ldots, \xi_n(p)) = f(h([x_1]), \ldots, h([x_n]))(p) = h(f([x_1], \ldots, [x_n]))(p) = 0, \tag{3.14}$$

où on utlise effectivement que h est un morphisme d'algèbres et que f est un polynôme (et alors ils "commutent" sur $[x_1], \ldots, [x_n]$).

Pour l'instant, ψ est seulement une application. Pour le Lemme 3.1.22 il est un morphisme. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ et $p \in X$, on a $\xi_i = \alpha(\varphi)([x_1]) = x_i \circ \varphi$ et alors :

$$\beta \circ \alpha(\varphi)(p) = (x_1 \circ \varphi(p), \ldots, x_n \circ \varphi(p)) = (\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)) = \varphi(p). \tag{3.15}$$

Soit $h \in \mathrm{Hom}(A(Y), \mathcal{O}(X))$ et $f \in A(Y)$, alors :

$$\alpha \circ \beta(h)(f) = f \circ \beta(h) = f(h([x_1]), \ldots, h([x_n])) = h(f([x_1], \ldots, [x_n])) = h(f), \tag{3.16}$$

c'est à dire, $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(A(Y),\mathcal{O}(X))}$ et $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ et alors β inverti α. □

Avec ce résultat on peut formuler une condition nécéssaire et suffisante pour déterminé quand deux variétés affines sont la même.

Proposition 3.1.24. *Deux variétés affines X et Y sont isomorphes ssi $A(X)$ et $A(Y)$ sont isomorphes comme $\mathbb{K}$ algèbres.*

Démonstration. $\Leftarrow$) On le sait déjà par la Remarque 2.2.8.

$\Rightarrow$) On notte que pour des variétés affines, la Proposition 3.1.23 est symétrique. Alors si on a un isomorphisme $\alpha(\varphi)$ dans $\mathrm{Hom}(A(Y), A(X))$, il existe l'inverse $\alpha(\varphi)^{-1}$ dans $\mathrm{Hom}(A(X), A(Y))$. De plus, par construction, on a $\alpha(\varphi)^{-1}(g) = g \circ \psi$ pour certain $\psi \in \mathrm{Hom}(Y,X)$. Alors :

$$\begin{aligned} g = \mathrm{Id}_{A(X)}(g) = \alpha(\varphi) \circ \alpha(\varphi)^{-1}(g) = \alpha(\varphi) \circ (g \circ \psi) = g \circ \varphi \circ \psi \\ f = \mathrm{Id}_{A(Y)}(f) = \alpha(\varphi)^{-1} \circ \alpha(\varphi)(f) = \alpha(\varphi)^{-1} \circ (f \circ \varphi) = f \circ \psi \circ \varphi \end{aligned} \tag{3.17}$$

et pourtant $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_X$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_Y$ donc φ est un isomorphisme dans $\mathrm{Hom}(X,Y)$. □

Remarque 3.1.25. *Si on a un morphisme de variétés $\varphi : X \to Y$, alors l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert, mais ceci n'est pas valable pour des variétés : on peut considérer le cas d'$\mathbb{A}^2$ et la projection de la Figure 1.4b dans la droite $y = 0$. On obtient que pour chaque point image il y a plusieurs points à l'image réciproque, et elle n'est pas connexe (donc elle ne peut pas être une variété de $\mathbb{A}^2$).*

En fait, si on considère :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x,xy) \end{array} \tag{3.18}$$

on voit que même $\varphi(\mathbb{A}^2) = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Voyons maintenant deux constructions importantes : l'**Application de Veronese** et le **Plongement de Segre**. Après on ajoutera une troisième, l'**Éclatement**.

3.1.1 Application de Veronese

Considérons tous les monomes $M_0, \ldots, M_N$ de degré d en $n+1$ vriables, où $N = \binom{n+d}{n} - 1$ est le résultat de choisir :

$$\bullet \ | \ \bullet \ \cdots \ \bullet \ | \ \bullet \ \bullet$$

les places pour les $n+1$ variables (d points et n barres, mais on commence à énumérer par 0).

Définition 3.1.26. *L'*application de Veronese *pour degré d en $n+1$ variables est :*

$$\begin{array}{cccc} \rho_d & : & \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & & (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (M_0 : \ldots : M_N) \end{array} \tag{3.19}$$

Proposition 3.1.27. *On a un morphisme θ quand on extend l'application :*

$$\begin{array}{cccc} \theta & : & \mathbb{K}[y_0, \ldots, y_N] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \\ & & y_i & \longrightarrow & M_i \end{array} \quad \textit{pour tout} \quad i = 0, \ldots, N. \tag{3.20}$$

1. *Le noyeau $\ker(\theta) = \mathfrak{a}$ est un idéal homogène et premier.*
2. *L'image de ρ_d est $Z(\mathfrak{a})$.*
3. *L'application ρ_d est un isomorphisme entre $\mathbb{P}^n$ et $\rho_d(\mathbb{P}^n)$.*

Démonstration. On laisse cette Proposition comme exercice à remplir par le lecteur. □

Exemple 3.1.28. *Le cas $d = 2$ et $n = 1$ est :*

$$\begin{array}{cccc} \rho_2 & : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & & (x_0, x_1) & \longmapsto & (x_0^2, x_0x_1, x_1^2) \end{array} \tag{3.21}$$

Si on pose les coordonnées de $\mathbb{P}^2$ comme $[y_0, y_1, y_2]$, alors l'image de ρ_2 est définie par $y_1^2 - y_0y_2 = 0$. En ce cas particulier, ce polynôme nous donne toute l'information de l'image, puis que si on a un autre polynôme en ces variables et irréductible, leur intersection est une finité de points, mais l'image est une infinité.

On a que $C = \rho_2(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^2$ est une conique irréductible, et $\mathbb{P}^1 \cong C$ par la Proposition 3.1.27, mais $S(\mathbb{P}^1) \ncong S(C)$ EXERCICE.

3.1.2 Plongement de Segre

Définition 3.1.29. *Le* plongement de Segre *pour degrés r et s est :*

$$\begin{array}{cccccc} \psi_{r,s} & : & \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & & (x_0, \ldots, x_r) \times (y_0, \ldots, y_s) & \longmapsto & (\ldots : x_i y_j : \ldots) \end{array} \tag{3.22}$$

où $N = (r+1)(s+1) - 1 = rs + r + s$.

Proposition 3.1.30. *1. L'application $\psi_{s,r}$ est injective.*

2. Soit η le morphisme provenant de l'extension de :

$$\begin{array}{cccccc} \eta & : & \mathbb{K}[\ldots, zij, \ldots] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_r, y_0, \ldots, y_s] \\ & & z_{ij} & \longmapsto & x_i y_j \end{array} \tag{3.23}$$

pour tout $i = 0, \ldots, r$ et $j = 0, \ldots, s$. Alors $\psi_{r,s}(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s) = Z(\ker(\eta))$.

3. Pour $X \subset \mathbb{P}^r$ et $Y \subset \mathbb{P}^s$ des variétés quasi projectives, on peut considérer $X \times Y \subset \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ avec le plongement de Segre. Alors le sous ensemble $X \times Y$ est une variété quasi projective de $\mathbb{P}^N$.

4. Pour $X \subset \mathbb{P}^r$ et $Y \subset \mathbb{P}^s$ des variétés projectives, alors le sous ensemble $X \times Y$ est une variété projective de $\mathbb{P}^N$.

Démonstration. On laisse cette Proposition comme exercice à remplir par le lecteur. □

3.2 Applications rationelles

D'une manière intuitive, on a vu que les fonctions régulières dans X une variété sont des morphismes $X \to \mathbb{K}$, et on peut penser que les applications rationelles dans X sont des morphismes qui sortent d'un ouvert non vide $U \subset X \to \mathbb{K}$.

Lemme 3.2.1. *Soit X et Y deux variétés, soit $\varphi, \psi : X \to Y$ deux morphismes. S'il existe un ouvert non vide $U \subset X$ tal que φ et ψ coincident sur U, alors φ et ψ coincident.*

Démonstration. Comme $Y \subset \mathbb{P}^n$, en considerant $\varphi, \psi : X \to Y \to \mathbb{P}^n$ on peut supposer que $Y = \mathbb{P}^n$. On considère l'application :

$$\begin{array}{cccccc} \varphi \times \psi & : & X & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n & \hookrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & & p & \longmapsto & (\varphi(p), \psi(p)) & & \end{array} \tag{3.24}$$

avec le plongement de Segre. Ceci est éfectivement un morphisme car toutes les conditionnes pour cela sont polynomials. La diagonal $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ (on pose $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ avec les coordonnées $(x_0 : \ldots : x_n) \times (y_0, \ldots, y_n)$ et alors la diagonale est définie par les equations $x_i y_j = x_j y_i$ pour tous $i, j = 0, \ldots, n$) est fermé dans $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$.

Alors $\varphi \times \psi(U) \subset \Delta$ et comme U est dense dans X et $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ est fermé, on a $\varphi \times \psi(X) \subset \Delta$ et alors ε et ψ coincident. □

Définition 3.2.2. *Soit X et Y des variétés. Une* application rationelle *de X dans Y est une classe d'équivalence des paires (U, φ_U) où U est un ouvert non vide, $\varphi_U : U \to Y$ est un morphisme et $(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V)$ quand $\varphi_U = \varphi_V$ sur $U \cap V$.*

Cette rélation est trivialement d'équivalence.

Définition 3.2.3. *Une application rationnelle φ de X dans Y est dite* dominante *si pour une paire (U, φ_U) de φ on a que $\varphi_U(U)$ est dense dans Y.*

Lemme 3.2.4. *Soit φ une application rationnelle dominante de X dans Y. Alors pout toute paire (U, φ_U) de φ on a que $\varphi_U(U)$ est dense dans Y.*

Démonstration. EXERCICE. □

On peut considérer la catégorie des $\mathbb{K}$ variétés dont les morphismes sont les applications rationelles dominantes. On a aussi le concepte d'**application birationnelle** où **isomorphisme birationnel**.

Définition 3.2.5. *Soit X et Y deux variétés. On dit qu'une application rationnelle dominante $\psi : X \dashrightarrow Y$ est un* isomorphisme birationnel *s'il existe une application rationnelle dominante $\phi : Y \dashrightarrow X$ tel que $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_X$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_Y$ par tout où $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$ sont définies respectivement.*

En ce cas, on dit que X et Y sont des variétés birationnelles *où* birationnellement équivalentes*.* *Une variété birationellement équivalente à $\mathbb{P}^n$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}^+$) s'appelle* rationnelle*.*

Ces définitions sont éffectivement cohérents avec ce qu'on à vu pour le cas affine.
Voyons maintenant un exemple d'application rationnelle.

3.2.1 Éclatement

Définition 3.2.6. *Soit $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ une variété quasi projective avec les coordonnées $(x_1, \dots, x_n) \times (y_1 : \dots : y_n)$. On considère le sous ensemble $X \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ défini par les équations $x_i y_j = x_j y_i$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$. On peut considérer la projection φ donnée par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{A}^n \end{tikzcd}$$

*Le morphisme $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$ est dit l'*éclatement de $\mathbb{A}^n$ dans l'origine*. L'image réciproque $\varphi^{-1}(0)$ s'appelle* diviseur exceptionnel d'éclatement*.*

Clairement φ est un morphisme, car il est la composition du plongement de Segre et d'une projection, et toutes les conditions sur X sont polinomials, de manière que la deuxième condition du Lemme 3.1.22 est satisfaite.

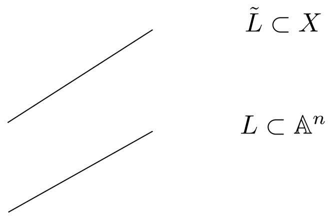
Remarque 3.2.7. *1. Pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ on a :*

$$\varphi^{-1}(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n) \times (a_1 : \dots, a_n). \tag{3.25}$$

Si on considère $\varphi : X \setminus \varphi^{-1}(0) \to \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$, on obtient un isomorphisme.

2. *Voyons maintenant $\varphi^{-1}(0)$. Comme les équations qui définissent X n'imposent aucune condition sur $(y_1 : \dots, y_n)$, on a que le fibre au dessus de 0 est $\mathbb{P}^{n-1}$.*
3. *On notte que les points de $\varphi^{-1}(0)$ sont en bijection avec les droites de $\mathbb{A}^n$ qui passent par 0. Soit $L \subset \mathbb{A}^n$ unde droite contenant 0, si on enlève l'origine on peut la paramétrer comme*

$x_i = a_i t$ pour $t \in \mathbb{K}^\times$. De plus, on peut la monter dans X et obtenir $\tilde{L}$, qui ne contient pas 0 :



C'est à dire, $\tilde{L}$ est définie par $x_i = a_i t$ et $y_i = a_i t$ avec $t \in \mathbb{K}^\times$. Mais comme y_i sont des coordonnées homogénes, $\tilde{L}$ est définie par $x_i = a_i t$ et $y_i = a_i$ avec $t \in \mathbb{K}^\times$. De plus, on notte que les conditions sur X nous permettent d'ajouter $t = 0$ directement pour avoir que $\tilde{L}$ toute entière est définie par $x_i = a_i t$, $y_i = a_i$ avec $t \in \mathbb{K}$. Cette droite coupe le diviseur exceptionnel exactement dans un point : $(0, \ldots, 0) \times (a_1, \ldots, a_n)$.

Définition 3.2.8. *Soit Y une sous variété affine de $\mathbb{A}^n$. L'*éclatement de Y à l'origine *est :*

$$Y' = \overline{\varphi^{-1}(Y \setminus \{0\})}, \tag{3.26}$$

*où $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$ est l'éclatement de $\mathbb{A}^n$ à l'origine. La projection $\varphi_Y : Y' \to Y$ est aussi appellée l'*éclatement de Y à l'origine.

Proposition 3.2.9. *1. L'éclatement X de $\mathbb{A}^n$ à l'origine est irréductible.*

2. L'application φ produit un isomorphisme entre $Y \setminus \{0\}$ et $Y' \setminus \varphi^{-1}(0)$.

Démonstration. 1. On notte que X est défini par des polynômes ($x_i y_j = x_j y_i$ pour $i = 1, \ldots, n$) qui sont irréductibles, et alors tout X est irréductible.

2. C'est clair car φ est un isomorphisme entre $X \setminus \varphi^{-1}(0)$ et $\mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ et ce qu'on veut démonstrer n'est qu'une restriction de ce cas.

□

Remarque 3.2.10. *La Définition 3.2.8 dépend du plongement $Y \subset \mathbb{A}^n$ qui est déterminé par le plongement $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$, mais en fait il y a une définition genérale où ceci n'est pas le cas.*

De plus, pour $Y \subset \mathbb{P}^n$ on peut définir l'éclatement de manière similaire, car si on considère $\mathbb{P}^n$ avec coordonnées $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ et $\mathbb{P}^{n-1}$ avec coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ on peut supposer qu'on travaille sur $x_0 \neq 0$ et alors on éclate $(1 : 0 : \ldots : 0)$.

Exemple 3.2.11. *Considérons le cas particulier où Y est la courbe irréductible dans $\mathbb{A}^2$ définie par $y^2 = x^2(x+1)$, qui est une cubique singulière (avec la singularité dans le $(0,0)$). On veut savoir qu'est ce qu'il ce passe quand on fait Y'. Notre cubique est :*

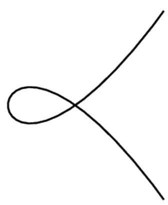


FIGURE 3.1 – La cubique définie par $y^2 = x^2(x+1)$.

Soit $X \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ en $0 = (0,0)$. On a $Y' \subset X$, si on pose $\mathbb{P}^1$ avec coordonnées $(t:u)$ notre courbe est une composante de :

$$\begin{cases} y^2 = x^2(x+1) \\ xu = yt \end{cases} \tag{3.27}$$

(on a ajouté les conditions de X et les conditions de Y). Comme on vera à l'Exemple 3.2.14, on est dans un espace qui resemble $\mathbb{A}^2$ avec une bande $\mathbb{P}^1$ accrochée à 0 (à la quelle on monte dépendant de la peinte avec qu'on approche le 0), de manière que si on pose le diviseur exceptionnel comme un droite vertical, notre dessin est :

Figure 3.2 – Rouge : éclatement de la Figure 3.1. Noir : diviseur exceptionnel.

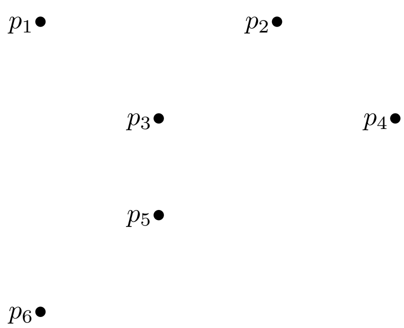
où l'éclatement Y' (en rouge à la Figure 3.2) coupe le diviseur exceptionnel exactement en deux points, car en Y on s'approche à 0 avec exactement deux directions, et est non singulière. Cette Y' est ce qu'on appelle une résolution de Y (une résolution est essentialement, mais avec certaines conditions, une manière de trouver des variétés birationnellement équivalentes dont une est non singulière).

Exemple 3.2.12. *Pour la variété $\mathbb{P}^2$ on peut considérer X l'éclatement dans un point point, et alors on obtient une projection :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

et en prenant coordonnées on peut écrire les équations explicites.

On peut aussi éclater $\mathbb{P}^2$ en deux points, et en fait en plusieurs points. Mais nous voulons éclater en exactement sis points (et ces points seront en position générale, c'est à dire, ils ne sont pas dans une conique et pour chaque choix de trois points, ils ne sont pas dans une droite). Cette construction est faite en prenant sis points dans $\mathbb{P}^2$:



et on commence par faire X_1 l'éclatement en p_1. Alors le complementaire de p_1 est dans X_1 de manière naturalle, et on peut alors éclater sur p_2 et obtenir X_2. Ce processus se passe pour tout point, jusqu'à ce qu'on obtient X_6 :

$$\begin{tikzcd} X_6 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

On affirme que X_6 est isomorphe à une surface non singulière de degré 3 dans $\mathbb{P}^3$ (affirmation difficile de vérifier).

Pour prendre une idée de ce qu'on veut voir, considérons le cas de $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_3]$ un polynômne homogène avec $Z(F) \subset \mathbb{P}^3$. Si F à degré 1 où 2 (comme l'hyperboloïd de la Figure 3.3 qui est isomorphe comme variété à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$), on a toujours une infinité de droites dans $Z(F)$.

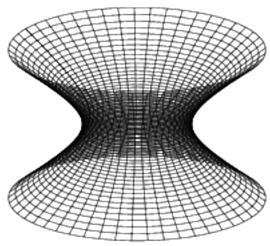


FIGURE 3.3 – Un hyperboloïde à une nappe.

En fait, sur chaque surface cubique non singulière à $\mathbb{P}^3$ il y a exactement 27 droites. Dans le cas général ceci est difficile à vérifier, et sur X_6 ce sont :

1. *Les 6 diviseurs exceptionnels $E_1, \ldots, E_6$ des éclatements aux points $p_1, \ldots, p_6$.*
2. *Les 15 droites $L_{i,j}$ qui passent par chaque choix de deux points p_i, p_j avec $i, j = 1, \ldots, 6$ et $i \neq j$.*
3. *Les 6 coniques C_i qui passent par tous les points sauf p_i, $i = 1, \ldots, 6$.*

De plus, toute cubique non singulière en $\mathbb{P}^3$ s'obtien de cette façon comme un éclatement X_6 de sis points (difficile de vérifier).

*On peut aussi nous démander combien de droites on a sur chaque surface non singulière de degré 4 dans $\mathbb{P}^3$, et le **Théorème de Segré** (difficile à démonstrer, ici on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) nous garanti que ce numéro est mineur où égale à 64. En général, à partir de degré 3, le nombre de droites est toujours fini.*

Remarque 3.2.13. *Sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ considéron les surfaces définies par :*

$$\begin{array}{lcc} X_1 & : & x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0 \\ X_2 & : & x_0(x_1^3 - x_0^3) + x_2(x_3^3 - x_2^3) = 0 \end{array} \tag{3.28}$$

où X_1 est la quartie de Fermat *qui contient 48 droites et X_2 est la* quartie de Schur *qui contient 64 droites.*

Démonstration. On laisse cette Remarque comme exercice à remplir par le lecteur. □

Exemple 3.2.14. *Considérons l'éclatement de $\mathbb{R}^2$ à l'origine. De point de vue topologique, on est dans $\mathbb{R}^2$ mais alors que nous approchons l'origine en differentes directions nous nous trouvons sur un different point de $\mathbb{P}^1$ (pour chaque peinte on à un unique point associé). Pour cela on peut identifié cet éclatement avec $\mathbb{R}^2$ à qui on a enlevé un disque au tour de l'origine et on a collé un ruban de Möbius, c'est à dire, nous sommes dans $\mathbb{R}^2 \coprod \mathbb{P}^2$ (l'union connexe de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{P}^2$).*

Dans cette même direction, mais pluc compliqué de voir, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'éclatement de $\mathbb{C}^2$ dans l'origine, on obtient l'union connexe de $\mathbb{C}^2$ et $\overline{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ où on veut dire qu'on somme $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec l'orientation renversée.

Maintenant on parlera du concepte de **diviseur** d'une variété.

Définition 3.2.15. *Soit X une variété. Un* diviseur *D de X est une collection finie de sous variétés $C_1, \ldots, C_s$ fermées de X de codimension 1, où cettes variétés sont munies de nombres entiers $m_1, \ldots, m_s$ (on notte qu'on peut avoir $m_i = 0$ pour certain $i = 1, \ldots, s$). On écrit :*

$$D = m_1 C_1 + \cdots + m_s C_s. \tag{3.29}$$

Si on a $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ deux diviseurs de X, on défini :

$$\begin{aligned} D^{(1)} + D^{(2)} &= m_1^{(1)} C_1 + m_s^{(1)} C_s + \cdots + m_1^{(2)} C_1 + m_s^{(2)} C_s \\ &= (m_1^{(1)} + m_1^{(2)}) C_1 + \cdots + (m_s^{(1)} + m_s^{(2)}) C_s. \end{aligned} \tag{3.30}$$

En particulier, l'ensemble des diviseurs est un groupe. Voyons maintenant quelques résultats techniques qui convergent en une caractérisation de l'équivalence birationnelle de deux variétés quasi projectives.

Pour ce qui suit, on appelle variété affine à toute variété genérale qui est isomorphe à un sous ensemble algébrique fermé de $\mathbb{A}^n$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}^+$). Par la définition de variété, cettes variétés affines seront toujours irréductibles.

Lemme 3.2.16. *Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une hypersurface (c'est à dire, une sous variété de codimension 1) définie par un polynôme $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Alors $\mathbb{A}^n \setminus Y$ est isomorphe à l'hypersurface $H \subset \mathbb{A}^{n+1}$ définie par $x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n) = 1$. En particulier, $\mathbb{A}^n \setminus Y$ est affine et son anneau de coordonnées est $S^{-1}\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ où S est le système multiplicatif formé par les puissances positives où nulles de f.*

Démonstration. Considérons le morphisme :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & H & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \setminus Y \\ & & (a_1, \ldots, a_{n+1}) & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_n) \end{array} \tag{3.31}$$

qui en fait est une bijection, avec l'application réciproque :

$$\begin{array}{cccc} \varphi^{-1} & : & \mathbb{A}^n \setminus Y & \longrightarrow & H \\ & & (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_n, 1/f(a_1, \ldots, a_n)) \end{array} \tag{3.32}$$

qui est aussi un morphisme par le Lemme 3.1.22.

Clairement on a que $\mathbb{A}^n \setminus Y$ est une variété affine. De plus :

$$A(\mathbb{A}^n \setminus Y) = A(H) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}] \Big/ I(H) = \mathbb{K}\left[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \ldots, x_n)}\right] \tag{3.33}$$

car H est définie par $x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Ceci est évidemment $S^{-1}\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ avec S comme on voulait. □

Lemme 3.2.17. *Soit X une variété. Alors il existe une base de la topologie de X formée par des ouverts affines.*

Démonstration. Soit $p \in X$ un point et $U \ni p$ un voisinage ouvert de ce point. On veut montrer qu'il existe un voisinage ouvert affine $V \ni p$ tal que $V \subset U$. Comme U est une variété quasi projective, on peut supposer $U = X$. De plus, comme par le Corollaire 3.1.20 toute variété est recouverte par des variétés quasi affines, on peut supposer que X est quasi affine. Considérons $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Z = \overline{X} \setminus X$:

$$Z = \overline{X} \setminus (T \cap W) = (\overline{X} \setminus T) \cup (\overline{X} \setminus W) = (\overline{X} \cap T^C) \cup (\overline{X} \cap W^C), \tag{3.34}$$

(on peut écrire $X = T \cap W$ pour T une variété affine et W un ouvert de $\mathbb{A}^n$) où $\overline{X} \subset T$ donc $\overline{X} \cap T^C = \emptyset$ et $Z = \overline{X} \cap W^C$ est un fermé de $\mathbb{A}^n$. On considère l'idéal $I(Z) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Comme $p \in X$, on a que $p \notin Z$, donc il existe un polynôme $f \in I(Z)$ tal que $f(p) \neq 0$. Posons $Y = Z(f)$ et considérons $X \setminus (X \cap Y)$:

$$X \setminus (X \cap Y) = X \cap (X \cap Y)^C = X \cap (X^C \cup Y^C) = (X \cap X^C) \cup (X \cap Y^C) = X \cap Y^C, \tag{3.35}$$

et alors ceci est un ouvert de X car Y^C est un ouvert de $\mathbb{A}^n$. D'autre part, $p \in X \setminus (X \cap Y)$ et comme f s'annulle dans $\overline{X} \setminus X$, on a que :

$$X \setminus (X \cap Y) = \overline{X} \setminus (\overline{X} \cap Y) = (\mathbb{A}^n \setminus Y) \cap \overline{X} \tag{3.36}$$

un fermé dans $\mathbb{A}^n \setminus Y$, qui est affine. Alors, $X \setminus (X \cap Y)$ es l'ouvert affine qu'on voulait. $\square$

Proposition 3.2.18. *Soit X, Y des variétés et $\varphi : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante. Alors φ induit un morphisme de $\mathbb{K}$ algèbres :*

$$\begin{array}{cccc} \rho_\varphi & : & K(Y) & \longrightarrow & K(X) \\ & & f & \longmapsto & \varphi_U \circ f \end{array} \tag{3.37}$$

où (U, φ_U) est un réprésentant de φ défini à l'image de f.

Cette construction fourni une bijection naturelle entre les applications dominantes de X dans Y et les morphismes de $\mathbb{K}$ algèbres de $K(Y)$ dans $K(X)$.

Démonstration. Il suffit de construire une application réciproque, soit $\theta : K(Y) \to K(X)$ un morphisme de $\mathbb{K}$ algèbres. Comme Y admet un récouvrement par variétés affines, on peut supposer $Y \subset \mathbb{A}^n$ affine. Considérons $A(Y)$ et posons $y_1, \dots, y_r$ les genérateurs qui l'engendrent comme $\mathbb{K}$ algèbre. On considère $\theta(y_1), \dots, \theta(y_r)$ des fonctions rationnelles sur X. Il existe un ouvert non vide $U \subset X$ sur lequel ces fonctions sont régulières.

Cet argument nous donne un morphisme $A(Y) \to \mathcal{O}(U)$ qui est injectif par construction, donc (comme U est dense dans X) par la Proposition 3.1.23 on a un morphisme $U \to Y$, qui représente une application rationnelle dominante $X \dashrightarrow Y$ (car on considérait les morphismes entre variétés comme applications dominantes). $\square$

Théorème 3.2.19. *Soit X et Y deux variétés. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *X et Y sont birationnellement équivalentes.*
2. *Il existe un ouvert non vide $U \subset X$ et un ouvert non vide $V \subset Y$ tal que U et V sont isomorphes (comme variétés).*
3. *$K(X)$ et $K(Y)$ sont isomorphes (comme $\mathbb{K}$ algèbres).*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) On a deux applications rationnelles dominantes réciproques :

$$\varphi : X \dashrightarrow Y, \quad \psi : Y \dashrightarrow X, \tag{3.38}$$

on représente φ par (U, φ_U) et ψ par (V, ψ_V). Alors $\psi \circ \varphi$ est représentée par $(\varphi_U^{-1}(V), \psi_V \circ \varphi_U)$ et $\varphi \circ \psi$ par $(\psi_V^{-1}(U), \varphi_U \circ \psi_V)$. Alors $\psi_V \circ \varphi_U$ est l'identité sur $\varphi_U^{-1}(V)$ et $\varphi_U \circ \psi_V$ est l'identité sur $\psi_V^{-1}(U)$. On obtient donc un isomorphisme entre les ouverts $\psi_V^{-1}(\varphi_U^{-1}(V))$ et $\varphi_U^{-1}(\psi_V^{-1}(U))$. De plus, tout est non vide puis que φ et ψ sont dominantes.

(2) $\Rightarrow$ (3) Est immediat, car $K(X)$ coincide avec $K(U)$ (puis que U est un ouvert dense dans X), qui se correspond avec $K(V)$ qui coincide avec $K(Y)$ (car à nouveau V est un ouvert dense dans Y).

(3) $\Rightarrow$ (1) Un argument similaire à celui utilisé dans la deuxième implication de la Proposition 3.1.24 mais à l'aide de la Proposition 3.2.18 montre que il y a une bijection entre les applications birationnelles dominantes $X \dashrightarrow Y$ et les isomorphismes de $\mathbb{K}$ algèbres $K(Y) \to K(X)$. Ceci est sufissant pour démonstrer ce qu'on voulait. $\square$

Bibliographie

[1] Igor Rostislavovich Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer, 2013.

[2] Igor Rostislavovich Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 2*. Springer, 2013.

[3] Joseph Hillel Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer, 1986.

[4] David H. Laidlaw, *Coloring 3D Line Fields Using Boy's Real Projective Plane Immersion*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2009.

[5] M. F. Atiyah et I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics, 1994.

[6] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer, 1997.