Théorie de Lie et Représentations I

Pablo Sánchez Ocal

30 septembre 2015

Table des matières

1 Introduction

Pour étudier la **Théorie de Lie** et la **Théorie des Représentations**, on adopterai un point de vue historique en Théorie de Groupes. Galois va voire les groupes comme permutations des racines d'un polynôme.

Ici pour G un groupe, la question c'est l'étude des morphismes de groupes :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V), \tag{1}$$

sent V un espace vectoriel. Alors, à (ρ, V) on dit une *représentation* de G. Ceci est étudié par la Théorie des Représentations.

On a une double motivation, celle ci pour obtenir information sur G, et une deuxième le fet que les représentations sont un sujet central en science.

Exemple 1. *L'exemple fondamental c'est celui de la Physique Quantique : un système quantique n'est que :*

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}(V) \tag{2}$$

un morphisme d'algèbres, sent A l'algèbre des ensembles et V l'espace des états.

La théorie "varie" (dans le sense que les techniques mathématiques sont différentes) si on parle de groupes, algèbres, corps... En particulier, quelques cas intéressants sont :
— groupes finis, discrets, de Lie et semblants,
— algèbres de dimension finie,
— algèbres de Lie,
— algèbres de Kac-Moody,
— groupes quantiques.
On traitera les trois dernières pendant ce cours, laissent les deux dernières comme exemples pour la deuxième partie.

2 Algèbres et leurs représentations

On fixe $\mathbb{K}$ un corps. On suppose connu le concepte d'A une $\mathbb{K}$ algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ [1].

Exemple 2. *Soit V un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ est une algèbre.*

Pour A, B des $\mathbb{K}$ algèbres, on a que $f : A \to B$ est un morphisme d'algèbres si f est $\mathbb{K}$ linéaire et multiplicative.

Définition 1. *Soit A une $\mathbb{K}$ algèbre. Une* représentation *de A est un couple (ρ, V) où V es un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ algèbres.*

En ce cas, on dit aussi que V est muni d'une structure de A module.

Exemple 3. *1. Tout espace vectoriel V est un $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ module, avec $\rho = Id$.*

2. Soit A une $\mathbb{K}$ algèbre. Alors $\{0\}$ est le module trivial.

1. Ici $\times$ note la multiplication entre elements de A et $\cdot$ la multiplication par elements de $\mathbb{K}$.

3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, prenons $q \in \mathbb{C}^*$ un élément qui n'est pas une racine de 1. Soit A l'algèbre définie par générateurs E, F, K, K^{-1} et rélations :

$$KE = q^2 EK, \quad KF = q^{-2} FK, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \tag{3}$$

Soit $m \geq 0$ et :

$$V_m = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_m. \tag{4}$$

Alors V_m à une structure de A module définie par :

$$\begin{cases} \rho(K) \cdot v_p = q^{m-2p} v_p \\ \rho(E) \cdot v_p = [m-p+1]_q v_{p-1} & \text{pour } 0 \leq p \leq m \\ \rho(F) \cdot v_p = [p]_q v_{p+1} \end{cases} \tag{5}$$

où $v_{-1} = v_{m+1} = 0$ et $[r]_q = \frac{q^r - q^{-r}}{q - q^{-1}}$ pour $r \in \mathbb{Z}$.
DOUTE

Cette définition à un lien avec les représentations des groupes. Pour G un groupe et $\mathbb{K}$ un corps, on peut associer l'algèbre $\mathbb{K}G$:

$$\mathbb{K}G = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}e_g, \tag{6}$$

sent $(e_g)_{g \in G}$ une base de $\mathbb{K}G$, avec le produït :

$$e_g \times e_{g'} = e_{gg'} \tag{7}$$

pour $g, g' \in G$. Soit de plus (ρ, V) une représentation du groupe G [2]. Alors V a également une structure de $\mathbb{K}G$ module :

$$\begin{array}{cccc} \rho' : & \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathrm{End}(V) \\ & \sum\limits_{g \in G} \lambda_g e_g & \longmapsto & \sum\limits_{g \in G} \lambda_g \rho(g) \end{array} \tag{8}$$

En particulier, l'étude des représentations d'algèbres inclus celle de groupes.

Exemple 4. *Soit $G = (\mathbb{C}, +)$ un groupe, $V = \mathbb{C}^2$ un espace vectoriel et :*

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & \alpha & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{9}$$

Alors (ρ, V) est une représentation de G. On a que $\mathbb{C}G = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}e_g = \mathbb{C}^{(\mathbb{C})}$, et que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}^{(\mathbb{C})}$ module.

2. Les groupes ont bien sûr des représentations dans un sens semblant a celui d'algèbres.

3 Algèbres de Lie et leurs représentations

Définition 2. *Une* algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, +, \cdot, [-,-])$ *est un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel* $(\mathfrak{g}, +, \cdot)$ *muni d'un* crochet de Lie *:*

$$\begin{array}{rcccc} [-,-] & : & \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & & (x,y) & \longmapsto & [x,y] \end{array} \tag{10}$$

qui est unne application $\mathbb{K}$ *bilineaire, antisymétrique et vérifie la rélation de Jacobi :*

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \tag{11}$$

pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$*.*

Définition 3. *On dit que* $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ *est une* sous algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ *si* $\mathfrak{g}'$ *est un sous espace vectoriel stable par* $[-,-]$*, c'est à dire,* $[x,y] \in \mathfrak{g}'$ *pour tous* $x, y \in \mathfrak{g}'$*.*

Exemple 5.
1. (Fondamental) *Soit* A *une algèbre. Alors* A *à une structure d'algèbre de Lie* $(A, +, \cdot, *_A)$ *en posant :*

$$[x,y] = x *_A y - y *_A x \tag{12}$$

pour tous $x, y \in A$*.*

2. *On peut définir l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Soit* G *un groupe de Lie, c'est à dire, un varieté* $\mathcal{C}^\infty$ *avec une structure de groupe telle que les applications :*

$$* : G \times G \longrightarrow G, \quad {}^{-1} : G \longrightarrow G \tag{13}$$

soit $\mathcal{C}^\infty$*. Pour* $e \in G$ *l'élement neutre, on défini* $\mathfrak{g} = T_e G$ *le plan tangent a* G *en* e*. Alors* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ *à une structure d'algèbre de Lie induite par* G*.*

3. *Pour* $\mathbb{K}$ *un corps, considérons* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{sl}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$*. Clairement* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *est une algèbre de Lie (qui est aussi une algèbre) et* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{K})$ *est une sous algèbre de Lie de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *(car pour* $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *on a* $\mathrm{tr}(AB-BA) = 0$*), mais* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{K})$ *n'est pas une sous algèbre de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*.*

4. *On défini :*

$$\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}Y \oplus \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}H. \tag{14}$$

La structure d'algèbre de Lie de $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ *est déterminée par les rélations (*$[A,B] = AB - BA$*) :*

$$[H,Y] = -2Y, \quad [H,X] = 2X, \quad [X,Y] = H. \tag{15}$$

Définition 4. *Soit* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{g}'$ *algèbres de Lie. Un* morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *est une application linéaire telle que* $\rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)]$ *pour tous* $x, y \in \mathfrak{g}$*.*

Définition 5. *Une* représentation (ρ, V) *d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est un espace vectoriel* V *muni d'une application* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ *qui est un morphisme d'algèbres de Lie. C'est à dire, pour tous* $g, g' \in \mathfrak{g}$ *on a* $\rho([g,g']) = \rho(g)\circ\rho(g') - \rho(g')\circ\rho(g)$*.*

Exemple 6. *1.* (Fondamental) *On dit* représentation adjointe *d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *à la représentation donné par :*

$$\begin{array}{rcccccccc} \rho & : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) & & & & \\ & & x & \longmapsto & \rho(x) & : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & & & & & & y & \longmapsto & [x,y] \end{array} \tag{16}$$

2. Soit $m \geq 0$ *et* $V_m = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_m$. *Alors* V_m *a une structure de* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ *module (dans le sense d'algèbre de Lie) avec :*

$$\begin{cases} H \cdot v_p = (m-2p)v_p \\ X \cdot v_p = (m-p+1)v_{p-1} & \textit{pour } 0 \leq p \leq m \\ Y \cdot v_p = (p+1)v_{p+1} \end{cases} \tag{17}$$

où $v_{-1} = v_{m+1} = 0$.

3. (Algèbre de Heisenberg) *On considère* $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On prend* $p, q, c \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(\mathcal{F})$ *comme :*

$$\begin{array}{ll} p : \dfrac{\partial}{\partial x} & f \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ q : \cdot & f \longmapsto (x \mapsto x \cdot f(x)) \\ c : \mathrm{Id}_\mathcal{F} & \end{array} \tag{18}$$

Soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}p \oplus \mathbb{R}q \oplus \mathbb{R}c$. *Alors* $\mathcal{H}$ *est une sous algèbre de Lie de* $\mathrm{End}_\mathbb{R}(\mathcal{F})$ *car* $[p,q](f(x)) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot f(x)) - x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = f(x) = c(f(x))$ *et alors* $[p,q] = c$ *avec* $[c,p] = [c,q] = 0$. *En fait,* $\mathcal{F}$ *est une représentation de* $\mathcal{H}$.

Proposition 1. *Soit* V_1 *et* V_2 *représentations de* $\mathfrak{g}$*, alors* $V_1 \oplus V_2$ *est un* $\mathfrak{g}$ *module en posant :*

$$g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2 \tag{19}$$

pour $g \in \mathfrak{g}$*,* $v_1 \in V_1$*,* $v_2 \in V_2$.

Démonstration. On a bien un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\begin{aligned} [g,g'] \cdot (v_1+v_2) &= [g,g'] \cdot v_1 + [g,g'] \cdot v_2 \\ &= g \cdot (g' \cdot v_1) - g' \cdot (g \cdot v_1) + g \cdot (g' \cdot v_2) - g' \cdot (g \cdot v_2) \\ &= g \cdot (g' \cdot (v_1+v_2)) - g' \cdot (g \cdot (v_2+v_2)). \end{aligned} \tag{20}$$

□

Définition 6. *Soit* V_1 *et* V_2 *des* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels. Alors on défini le* produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ *comme :*

$$V_1 \otimes V_2 = \bigoplus_{\alpha \in V_1 \times V_2} \mathbb{K}e_\alpha \bigg/ \begin{array}{l} e_{(\lambda g_1 + \mu g_2, g_3)} = \lambda e_{(g_1,g_3)} + \mu e_{(g_2,g_3)} \\ e_{(g_1, \lambda g_2 + \mu g_3)} = \lambda e_{(g_1,g_2)} + \mu e_{(g_1,g_3)} \end{array} \tag{21}$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. *Pour* $v_1 \in V_1$*,* $v_2 \in V_2$ *on note* $v_1 \otimes v_2$ *l'image de* $e_{(v_1,v_2)}$ *dans* $V_1 \otimes V_2$*, et on lui dit un* tenseur pur.

On remarque que les tenseurs purs engendront $V_1 \otimes V_2$, mais pas tout élément de $V_1 \otimes V_2$ est un tenseur pur. De plus, si V_1 a une base $(v_a)_a$ et V_2 a une base $(v_b)_b$, alors les couples $(v_a \otimes v_b)_{a,b}$ forment une base de $V_1 \otimes V_2$. Si V_1 et V_2 sont de dimension finie, alors $V_1 \otimes V_2$ l'est aussi et $\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$. Parlons alors du **produit tensoriel des représentations**.

Proposition 2. *Soit V_1 et V_2 représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors $V_1 \otimes V_2$ est un $\mathfrak{g}$ module en posant :*

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2) = (g \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (g \cdot v_2) \tag{22}$$

pour tous $g \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Démonstration. On a bien un morphisme d'algèbres de Lie ; pour $g, g' \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [g, g'] \cdot (v_1 \otimes v_2) = ([g, g'] \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes ([g, g'] \cdot v_2) = g \cdot (g' \cdot v_1) \otimes v_2 \\ - g' \cdot (g \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes g \cdot (g' \cdot v_2) - v_1 \otimes g' \cdot (g \cdot v_2), \end{aligned} \tag{23}$$

et par ailleurs :

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot (v_1 \otimes v_2)) - g' \cdot (g \cdot (v_1 \otimes v_2)) = g \cdot ((g' \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (g' \cdot v_2)) \\ - g' \cdot ((g \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (g \cdot v_2)) = (g \cdot (g' \cdot v_1)) \otimes v_2 + \cancel{(g' \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_2)} \\ + \cancel{(g \cdot v_1) \otimes (g' \cdot v_2)} + v_1 \otimes (g \cdot (g' \cdot v_2)) - (g' \cdot (g \cdot v_1)) \otimes v_2 \\ - \cancel{(g \cdot v_1) \otimes (g' \cdot v_2)} - \cancel{(g' \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_2)} - v_1 \otimes (g' \cdot (g \cdot v_2)). \end{aligned} \tag{24}$$

On a l'égalité. □

Définition 7. *Soient V et W représentations de $\mathfrak{g}$. Un* morphisme de $\mathfrak{g}$ modules *$f : V \to W$ est une application linéaire telle que pour tous $v \in V$ et $g \in \mathfrak{g}$:*

$$g \cdot f(v) = f(g \cdot v). \tag{25}$$

On à doncs la notion d'isomorphisme de représentations.

Définition 8. *Soit V une représentations de $\mathfrak{g}$. On dit que $V' \subseteq V$ est un* sous module *si V' est un sous espace vectoriel stable par l'action de $\mathfrak{g}$, c'est à dire :*

$$g \cdot v \in V' \text{ pour tous } g \in \mathfrak{g} \text{ et } v \in V'. \tag{26}$$

Exemple 7.
1. *Soit V_0, V_1 et V_2 des $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ modules. Alors $V_1 \otimes V_1 \cong V_2 \oplus V_0$ comme isomorphisme de $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ modules. Ceci implique que $V_1 \otimes V_1$ a un sous module de dimension 1.*
2. *Les sous modules triviaux de V sont $\{0\}$ et V.*

Définition 9. *Un $\mathfrak{g}$ module V est dit* simple *(ou* irreductible*) si il n'admet pas de sous modules non trivial (lest dit propres).*

Exemple 8. *Comme* $V_1 \oplus V_1 \cong V_2 \otimes V_0$, *on a que* $V_1 \otimes V_1$ *n'est pas simple comme* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ *module.*

Proposition 3. *Pour chaque* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *on a que* V_m *est un* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ *module simple.*

Démonstration. Soit $W \subset V_m$ un sous module non nul. Par définition, l'action de H sur V_m est diagonale, et a $m+1$ sous espaces vectoriels propres des $\mathcal{C}v_p$, $p = 0, \ldots, m$. Donc l'action de H sur W est diagonale, et alors il existe un p avec $v_p \in W$ (un des vecteurs propres). En appliquant X et Y, on obtien que tous les $v_i \in W$ pour $i = 0, \ldots, m$. Donc $W = V_m$ donc V_m est simple. □

Exemple 9. *Soit* V *un espace vectoriel, posons* $\mathfrak{g} = \mathrm{End}(V)$. *Alors* V *est un* $\mathfrak{g}$ *module simple. En effet, soit* $V' \subset V$ *un sous module non nul et* $v \in V' \setminus \{0\}$. *Alors pour* $w \in V \setminus \{0\}$ *existe un* $u \in \mathfrak{g}$ *avec* $u(v) = w$, *donc* $w \in V'$ *et* $V' = V$.

On traite maintenant le **problème fondamental en Théorie des Représentations**, c'est à dire, la classification à isomorphisme près des représentations simples d'une algèbre de Lie.

Définition 10. *Une représentation d'une algèbre de Lie est dite* semi simple *si elle est isomorphe à une somme directe de représentations simples.*

Exemple 10.

1. *Si* V *est une représentation simple, alors* V *est semi simple.*
2. *On a que* $V_1 \otimes V_1$ *est un* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ *module semi simple.*
3. *Le* $(\mathbb{C}, +)$ *module* $\mathbb{C}^2$, *entendu comme :*

$$\begin{array}{rccc} \rho & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \\ & & \alpha & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{27}$$

n'est pas simple. Il n'y a qu'une droite stable : $\mathbb{C} \times 0$.

Théorème 1. *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et* G *un groupe fini. Une représentation* V *de dimension finie de* G *est semi simple.*

Démonstration. Supposons V non simple. Soit $W \subset V$ un sos module propre. Soit $(e_\alpha)_\alpha$ une base de V (avec $(e^*_\alpha)_\alpha$ une base de V^*, le duelle) et soit $H : V \times V \to \mathbb{C}$ avec :

$$H(v, w) = \sum_{\substack{g \in G \\ \alpha}} \overline{e^*_\alpha(g \cdot v)} e^*_\alpha(g \cdot w). \tag{28}$$

On a que H est hermitiénne définie positive. Soit doncs $W' = W^\perp$. On veut voire que $V = W \oplus W'$. On a que W' est un G module ; en effet, pour $g \in G$, $v \in W'$ et $w \in W$:

$$H(g \cdot v, w) = H(v, g^{-1} \cdot w) = 0 \text{ car } g^{-1} \cdot w \in W, \tag{29}$$

et alors $g \cdot v \in W'$. Ici on utilise que $H(u, v) = H(g \cdot u, g \cdot v)$ pour quelconque $g \in G$ et $u, v \in V$. Par récurrence sur la dimension, W et W' sont semi simples, donc V aussi. □

4 Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes

Références

[1] William Fulton, Joe Harris, *Representation Theory : A First Course*. Springer Graduate Texts in Mathematics, 129 (3ème édition) 2004.

[2] Jean-Pierre Serre, *Lie Algebras and Lie Groups : 1964 lectures given at Harvard University*. Springer Lecture Notes in Mathematics, 1500, 2006.

[3] ✓ James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer Graduate Texts in Mathematics, 9 1978.

[4] Victor G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[5] ✓ Karin Erdmann, Mark J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2007.

[6] Andrew Baker, *Matrix Groups : An Introduction to Lie Group Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2002.